LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2024

PRÁCTICO 2: CÁLCULO PROPOSICIONAL

LA SEMÁNTICA

Ejercicio 1:

Expresar las siguientes proposiciones en fórmulas del lenguaje proposicional, luego asignar el valor de verdad que corresponda a cada proposición simple (de acuerdo a nuestro conocimiento del mundo), y finalmente determinar el valor de verdad de cada enunciado en su totalidad.

1. Los murciélagos son pájaros o vuelan gracias a su sonar.
2. Bugs Bunny es un ratón.
3. Las culebras son mamíferos, los perros son mamíferos y los hipopótamos también lo son.
4. China está en Asia o en Europa.
5. Dos más dos es cinco pero el cuadrado tiene cuatro lados.
6. No es cierto que Marte tiene satélites y Júpiter también.
7. Si estudias y vienes a clase, entonces aprobarás.
8. Los animales con pelo y que dan leche son mamíferos, pero si los gatos ronronean están de buen humor.
9. La Tierra es el último planeta del sistema solar y Plutón es un nuevo sol.

Ejercicio 2:

Sea $v : \mathbf{Form} \to \{\top, \bot\}$ una valuación. Sabiendo que $v(p_1) = \top$ ¿Qué puede decir a cerca de $v(P)$, para $P \in \mathbf{Form}$, en los siguientes casos?

1. $P = p_1$
2. $P = ((p_2 \wedge \neg p_1) \to (p_4 \wedge p_2))$
3. $P = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$
4. $P = (p_4 \to (p_3 \to p_1))$
5. $P = (\neg p_4 \wedge p_1)$
6. $P = \neg p_4$
7. $P = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$
8. $P = ((p_8 \to p_5) \to (\neg p_3 \wedge p_0))$

Ejercicio 3:

¿Qué puede afirmar a cerca del valor de verdad de las fórmulas del ejercicio anterior en los siguientes casos?

1. $v(p_1) = \bot$
2. $v(p_1) = v(p_2) = \neg v(p_3) = v(p_4) = v(p_8) = \bot$

Ejercicio 4:

Sea $P \in \mathbf{Form}$ la fórmula:

$$P = ((p_3 \to (p_5 \to p_3)) \to ((p_4 \to p_1) \to (p_2 \vee p_4)))$$

Sabiendo que existen valuaciones $v_{\overline{a}}$ tal que $v_{\overline{a}}(p_1) = a_1, v_{\overline{a}}(p_2) = a_2, \ldots, v_{\overline{a}}(p_5) = a_5$.
Se pide hallar las distintas n-uplas $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbf{B}^n$, si la valuación $v(P) = \bot$.
¿ Existe una valuación v tal que $v(P) = \top$?

Ejercicio 5:

Sabiendo que $v(p_1 \to p_2) = \top$, ¿qué se puede decir del valor de verdad de las siguientes fórmulas?

1. $(p_1 \vee p_3) \to (p_2 \vee p_3)$
2. $(p_1 \wedge p_3) \to (p_2 \wedge p_3)$

Ejercicio 6:

Es posible considerar un conectivo adicional $\leftrightarrow$, comúmente llamado *“si y sólo si”*, cuya tabla de verdad es la siguiente:

A	B	$A \leftrightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Encontrar una fórmula equivalente que sólo use conectivos en el conjunto $\{\wedge, \neg, \vee, \to\}$.

Ejercicio 7:

Escribir las tablas de verdad de las siguientes fórmulas y clasificarlas en tautología, contradicción y contingencia.

1. $(((\neg p_0 \vee p_1) \wedge \neg(p_1 \wedge \neg p_0)) \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow p_1))$
2. $((p_0 \to (p_1 \to p_3)) \to ((p_0 \to p_1) \to (p_0 \to p_3)))$
3. $((p_0 \leftrightarrow p_1) \vee p_1)$
4. $((\neg p_0 \vee p_1) \to (p_0 \to p_1))$
5. $((p_0 \to p_1) \wedge \neg(p_0 \to p_1))$

Ejercicio 8:

Examinar cada una de las últimas 5 columnas de la siguiente tabla de verdad y verificar si alguna representa la tabla de verdad de la fórmula $((p_0 \to p_1) \vee (p_2 \vee \neg p_1))$.

p_0	p_1	p_2	1	2	3	4	5
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

Ejercicio 9:

Encontrar una fórmula con variables x_1, x_2 y x_3, utilizando las conectivas $\neg$, $\vee$, y $\wedge$ que tenga como función de verdad a $f(x_1, x_2, x_3)$.

1. Utilizar método del Teorema 3.
2. Utilizar Forma Normal Disyuntiva.
3. Utilizar Forma Normal Conjuntiva.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Ejercicio 10:

Para cada una de las columnas numeradas de 1 a 5 del **Ejercicio 8**, encontrar una fórmula con variables p_0, p_1 y p_2, cuya función de verdad esté representada por la correspondiente columna. En cada caso las fórmulas debe obtenerse:

1. Utilizando las conectivas $\neg$, $\rightarrow$.
2. Utilizando Forma Normal Disyuntiva.
3. Utilizando Forma Normal Conjuntiva.
4. Elegir solo dos de las columnas y utilizar método del Teorema 3.

Ejercicio 11:

Demuestre que el conjunto $\{\neg, \vee\}$ es un conjunto adecuado de conectivos.

Ejercicio 12:

Sabiendo que el conjunto $\{\neg, \vee\}$ es un conjunto adecuado de conectivos, encontrar fórmulas equivalentes a las siguientes:

1. La fórmula obtenida en el punto 1.- del **Ejercicio 9**.
2. $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$
3. $((\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge s))$
4. $(p_0 \leftrightarrow p_1)$

Ejercicio 13:

Sabiendo que el conjunto $\{\neg, \wedge\}$ es un conjunto adecuado de conectivos, encontrar fórmulas equivalentes a las siguientes:

1. La fórmula obtenida en el punto 1.- del **Ejercicio 9**.

2. $(p_0 \to (p_1 \to p_4))$
3. $(((p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee \neg r))$
4. $((p_1 \leftrightarrow \neg p_2) \leftrightarrow p_3)$

Ejercicio 14:
Sabiendo que $\{\neg, \to\}$ es un conjunto adecuado de conectivos, encontrar fórmulas equivalentes a:

1. La fórmula obtenida en el punto 1.- del **Ejercicio 9**.
2. $((p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_4))$
3. $(p_3 \leftrightarrow p_1)$
4. $(p_4 \wedge (p_2 \wedge p_1))$

Ejercicio 15:
Se definen los conectivos $\downarrow$ y $|$ de la siguiente manera:

- La fórmula $(A \downarrow B)$ es verdadera si y sólo si ni A ni B son verdaderas. Su tabla de verdad es:

A	B	$A \downarrow B$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

- La fórmula $(A \mid B)$ es falsa si y sólo si A y B ambas son verdaderas. Su tabla de verdad es:

A	B	$A \mid B$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Demostrar si cada uno de los siguientes conjuntos de conectivos constituyen un conjunto adecuado de conectivos.

1. $\{\downarrow\}$
2. $\{|\}$
3. $\{\to\}$

Ejercicio 16:
Determinar, usando las tablas de verdad, si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias. ¿Hay entre ellas fórmulas equivalentes? Justifique.

1. $(p \to (q \to p))$

2. $((q \vee r) \rightarrow (\neg r \rightarrow q))$

3. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r))$

4. $(((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q)$

5. $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)))$

6. $(\neg p \vee (\neg q \vee p))$

7. $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg q \vee p))$

8. $((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$

9. $(((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p)$

Ejercicio 17:

Mostrar, utilizando tablas de verdad, si los siguientes pares de fórmulas son equivalentes:

1. $(p \wedge (q \vee r))$ y $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

2. $(p \vee (q \wedge r))$ y $((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

3. $(p \vee (p \wedge q))$ y p

4. $(p \vee q)$ y $(p \rightarrow q)$

5. $(p \rightarrow q)$ y $((p \wedge q) \vee \neg p)$

6. $((p \wedge q) \vee \neg p)$ y $((p \wedge q) \vee \neg s)$

7. $((p \wedge q) \vee \neg q)$ y $(p \vee \neg q)$

8. $(p \wedge q)$ y $(p \vee q)$

9. $(p \rightarrow q)$ y $(\neg p \rightarrow \neg q)$

Ejercicio 18:

En el uso cotidiano, suelen realizarse abusos en la escritura de fórmulas del cálculo proposicional al relajar el uso de paréntesis, cuando *no es ambiguo* el significado de la fórmula considerada (aunque no se corresponda con la definición de fórmulas del lenguaje). Para los siguientes ejercicios consideraremos un uso *menos formal* de paréntesis y se asumirá que el orden de precedencia de los conectivos lógicos es: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ (ordenados de mayor a menor según su precedencia). Si hay conectivos con la misma precedencia por convención se evalúan de izquierda a derecha.

En las siguientes expresiones elimine tantos paréntesis como le sea posible de manera que se mantenga la semántica de la fórmula original:

1. $((p \rightarrow (\neg q)) \wedge r)$

2. $((p \vee (q \vee r))$

3. $(((p \wedge (\neg q)) \wedge r) \vee s)$

4. $(\neg((\neg(\neg(p \vee q))) \rightarrow (p \wedge q)))$

Ejercicio 19:

Encontrar en la siguiente lista de fórmulas cuál se corresponde con la semántica de $\neg p \rightarrow \neg q \wedge r$.

1. $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge r$
2. $\neg p \rightarrow \neg(q \wedge r)$
3. $\neg(p \rightarrow \neg(q \wedge r))$
4. $\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)$
5. $\neg(p \rightarrow (\neg q \wedge r))$