LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2024

PRÁCTICO 4: CÁLCULO PROPOSICIONAL

SISTEMAS FORMALES

Sugerencia: Tenga en cuenta que como en algunos ejercicios se demuestran teoremas de $\mathcal{L}$, éstos se pueden usar como hipótesis en nuevas demostraciones.

Ejercicio 1:

Demostrar, en $\mathcal{L}$, que cada una de las siguientes *fbfs* son teoremas.

1. $((p_1 \to p_2) \to (((\neg p_1) \to (\neg p_2)) \to (p_2 \to p_1)))$
2. $(((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3)))$

Ejercicio 2:

Utilizar el Sistema Formal $\mathcal{L}$ para demostrar la validez del siguiente argumento:

Si tenemos una buena especificación entonces obtenemos un diseño correcto.

Si obtenemos un diseño correcto obtenemos un buen programa, a menos que nuestro programador sea mediocre.

Nuestro programador no es mediocre.

Por lo tanto, si tenemos una buena especificación obtenemos un buen programa.

Ejercicio 3:

Demostrar, en $\mathcal{L}$, que cada una de las siguientes *fbfs* son teoremas.

1. $(p_1 \to p_1)$
2. $((\neg p_1) \to (p_1 \to p_2))$
3. $((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))$

Ejercicio 4:

Demostrar que para *fbfs* cualesquiera $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$ es posible deducir lo que sigue:

1. $\{(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$ (Silogismo Hipotético)
2. $\{(\neg \mathcal{A})\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$
3. $\{(\neg(\neg \mathcal{A}))\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{A}$
4. $\{(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})), \mathcal{B}\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$
5. $\vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{B} \to (\neg(\neg \mathcal{B})))$
6. $\{(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), ((\neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to (\neg \mathcal{A}))\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$
7. $\{(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}))\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$

En donde sea conveniente, usar el Teorema de la Deducción o su recíproco.

Ejercicio 5:

Utilizando, cuando sea conveniente, el Teorema de Deducción o su recíproco demostrar que las siguientes *fbfs* son teoremas de $\mathcal{L}$, siendo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ *fbfs* cualesquiera de $\mathcal{L}$:

1. $((\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to ((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})))$
2. $((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$
3. $((\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$
4. $(\mathcal{A} \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B}))$
5. $(((\neg\mathcal{A}) \to \mathcal{B}) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{C}) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C})))$

Ejercicio 6:

Dado otro sistema formal $\mathcal{L}_1$, que cuenta con *Modus Ponens* y *Silogismo Hipotético* como sus reglas de inferencia y que utiliza los siguientes axiomas:

(Ax1) $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$

(Ax2) $((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$

(Ax3) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A})) \to (((\neg\mathcal{B}) \to \mathcal{A}) \to \mathcal{B}))$

Se pide:

1. Analice cada una de las fórmulas del ejercicio previo, y determine si la demostración realizada, considerando como sistema formal a $\mathcal{L}$, podría también ser una demostración en el nuevo sistema formal $\mathcal{L}_1$.
2. Demostrar en $\mathcal{L}_1$ que $\vdash_{\mathcal{L}_1} (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$.
3. ¿Qué necesitaría demostrar para probar que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$ son equivalentes?