LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2025

PRÁCTICO 5: CÁLCULO DE PREDICADOS

Primera Parte

Ejercicio 1:

Sea $\sigma = \langle f^{(2)}, g^{(1)}, P^{(1)}, a, b \rangle$ con f (binaria), g (unaria) y a, b ambos símbolos de constantes. Decidir, para las siguientes expresiones, cuáles son términos y cuales no lo son, justificando claramente la razón de su respuesta.

1. a
2. $f(x, b)$
3. $f(b, g(y))$
4. $g(g(x, y))$
5. $f(f(b, b), f(a, y))$
6. $g(g(a))$
7. $f(g(a), x$
8. $f(f(x), g(f(a, y)))$

Ejercicio 2:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, Q^{(1)}, R^{(1)}, =^{(2)}, P^{(2)}, a, b, c \rangle$ consta de dos símbolos de función f_1 (unario), f_2 (binario), cuatro símbolos de predicados: Q y R unarios, "=" y P binarios, y tres símbolos de constantes a, b y c. Decidir si las siguientes expresiones pertenecen a L_σ. Justifique cada respuesta.

1. $(\exists f_1(x)\ P(f_1(x, y)))$
2. $(\forall x\ (= (x, a) \rightarrow R(b, x)))$
3. $f_1((P(a, b) \wedge Q(c)))$
4. $P(Q(a), b)$
5. $(\forall xy\ (= (x, y) \rightarrow= (y, x)))$
6. $(\forall x\ (\exists c\ P(x, c)))$
7. $(\exists z\ (\exists y\ = (P(x, y), P(y, x))))$
8. $P(f_1(x), f_1(y))$
9. $(\exists \neg x(P(x, a) \vee R(f_1(x)))$
10. $(\forall x\ (\exists y\ (P(f_2(x, y), y) \wedge \neg = (x, y))))$
11. $(\exists x\ ((x \vee y) \wedge x))$
12. $(\exists x\ (Q(x) \wedge (\forall y\ (R(y) \rightarrow= (x, y)))))$
13. $((R(a) \rightarrow Q(a)) \rightarrow P(a, b))$
14. $((\forall x \wedge \forall y) f_2(x, y))$

15. $(\exists x f_1(x))$
16. $((R(a,b) \rightarrow Q(a,b)) \rightarrow P(a,b))$
17. $(\forall xy\ ((Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow\ (R(y) \vee P(y,x))))$

Ejercicio 3:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario σ **no contiene** símbolos de función. Describir el conjunto de términos del lenguaje.

Ejercicio 4:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle +^{(2)}, *^{(2)}, s^{(1)}, <^{(2)}, =^{(2)}, 1\rangle$ con tres símbolos de función: $+, *$ y s, dos símbolos de predicados: $<$ y $=$, y un símbolo de constante 1. Decidir si las siguientes expresiones pertenecen a L_σ y para las que pertenezcan distinguir entre términos, fórmulas atómicas y fórmulas bien formadas. Justifique cada respuesta.

1. $+(*(x,1), s(y))$
2. $<(*(x,1), s(y))$
3. $(\forall x\ (\exists\ y + (x,y)))$
4. $+(*(x,<), s(y))$
5. $+(x,y) = *(x,y)$
6. $(\forall x\ (\exists\ y < (x,y)))$

Ejercicio 5:

Formalizar las siguientes expresiones en el lenguaje con igualdad L_σ, sabiendo que su vocabulario :
$\sigma = \langle planeta^{(1)}, satélites^{(1)}, su\text{-}satélite^{(2)}, gira^{(2)}, Tierra, Sol, Luna\rangle$, usando la conceptualización:

planeta(x)	$\longrightarrow$	x es un planeta	Tierra	$\longrightarrow$	la Tierra
satélites(x)	$\longrightarrow$	x es un satélite	Sol	$\longrightarrow$	el Sol
su-satélite(x,y)	$\longrightarrow$	x es satélite de y	Luna	$\longrightarrow$	la Luna
gira(x,y)	$\longrightarrow$	x gira alrededor de y			

y considerando como universo del discurso a "*los cuerpos celestes*".

1. Hay por lo menos un satélite.
2. Todo planeta es un satélite y la Tierra no tiene satélites.
3. Hay exactamente un satélite.
4. Ningún planeta gira alrededor de sí mismo.
5. Todo satélite es satélite de algún planeta.

Ejercicio 6:

Simbolice las siguientes afirmaciones utilizando la lógica de primer orden (cálculo de predicado). Para cada una de ellas definir el vocabulario σ necesario para que sean fórmulas del lenguaje L_σ, aclarando informalmente qué significa cada símbolo de función y de predicado y tomando como universo, en *todos* los casos, a "*todo lo que existe*".

1. No todo es eterno.
2. El padre de Luis es el padre del padre de Juan.
3. Sólo las estrellas tienen luz propia, el sol es una estrella.
4. Nada es eterno.
5. Ningún repetidor es estudioso.
6. Algunos intelectuales son frívolos, y otros son muy mandones.
7. Hay alguien al que todos aman y alguien que ama a todos.
8. Todos los novatos son ingenuos.
9. Todo número multiplicado por cero da cero.
10. Existe un único marciano.
11. Algún europeo bajito disfruta con Mozart pero no con Wagner.
12. Los sucesores de números distintos son distintos.
13. 0 es el único natural que no es mayor que 0.
14. Ningún hombre es más viejo que su padre.
15. Cada paquete de la habitación 27 es más pequeño que uno de los paquetes de la habitación 29.
16. Hay exactamente tres pelotas rojas.
17. Todos los paquetes que están en la habitación 27 son más pequeños que los que están en la habitación 28.
18. Si Path es un dios egipcio y es padre de todos los dioses egipcios, entonces es su propio padre.
19. Los primos de Pedro son hermanos de Rosa. Algunos hermanos se envidian. Marta, que es cándida, es hermana de un primo de Pedro.

Ejercicio 7:

Mostrar cómo cambian las expresiones de la lógica de primer orden que simbolizan las afirmaciones del ejercicio anterior, si se consideran el mismo vocabulario σ y significado de los símbolos de función y de predicado definido por usted para cada caso, pero si acota lo más posible el universo sobre el que se trabaja (aclare cuál es el universo que usted considera en cada caso).

Ejercicio 8:

Simbolizar las frases listadas a continuación considerando las restricciones establecidas en a), b) y c).

a) Utilizando cuando sea necesario cuantificadores *existenciales* y/o *universales*.

b) Sin utilizar cuantificadores *existenciales*.

c) Sin utilizar cuantificadores *universales*.

En cada caso definir el vocabulario σ correspondiente, aclarar el universo considerado y el significado de cada símbolo de función y de predicado.

1. Hay un barbero que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos.
2. Ningún número es a la vez par e impar.
3. No todos los perros tienen manchas negras.
4. Ningún palacio tiene alfombras voladoras.
5. Algunos caballos son salvajes.
6. No a todos les gustan las montañas rusas.
7. Ningún dragón que viva en un zoológico es feliz.

Ejercicio 9:

Sea L_σ un lenguaje con vocabulario un símbolo de predicado binario P, un símbolo de función binario f y un símbolo de constante c. Decidir para cada una de las siguientes fórmulas qué variables son libres y cuáles ligadas:

1. $((\forall x_1 P(x_1, c)) \to P(f(x_1, x_2), x_2))$
2. $(\forall x_3\ (\forall x_1\ P(x_1, x_2) \to P(x_3, c)))$
3. $(\forall x_3 (P(f(c, x_1), x_2) \to P(x_1, x_2)))$
4. $(\forall x_2\ (P(x_3, x_2) \to (\forall x_3\ P(x_3, x_2))))$
5. $(\forall y (P(c, f(c, c)) \to P(c, c)))$
6. $(\forall x_1\ ((\exists x_2\ P(x_1, f(c, x_2))) \to (\exists x_3\ P(x_2, x_3))))$
7. $((\exists x_1\ (\forall x_2\ (\forall x_3\ (P(x_1, x_2) \wedge P(f(x_2, c), x_4))))) \vee (\forall x_4\ P(x_3, x_4)))$

Ejercicio 10:

Para cada una de las siguientes fórmulas φ ¿Cuáles de las apariciones de x_1 son libres y cuáles ligadas en cada una? Justifique su respuesta. ¿Cuáles son las variables libres de φ en cada caso ($Libres(\varphi)$)? ¿y las ligadas?

Para cada fórmula definir el vocabulario σ necesario para que sean consideradas fórmulas del lenguaje L_σ correspondiente.

1. $\varphi : (\forall x_2\ (P(x_1, x_2) \to P(x_2, a_1)))$
2. $\varphi : ((\forall x_1 (P(x_1) \to R(x_1, x_2))) \to ((\exists x_2 P(x_2)) \to R(x_1, x_3)))$
3. $\varphi : (P(x_3) \to \neg(\forall x_1 (\forall x_2\ Q(x_1, x_2, a_1))))$
4. $\varphi : ((\forall x_1\ P(x_1)) \to (\forall x_2\ Q(x_1, x_2, x_3)))$
5. $\varphi : (\forall x_2\ (P(f(x_1, x_2), x_1) \to (\forall x_1\ Q(x_3, f(x_1, x_2)))))$

Ejercicio 11:

Considerando el lenguaje L_σ del **ejercicio 2**, decidir si cada una de las siguientes fórmulas son o no enunciados. Justifique.

1. $(Q(a) \vee Q(b))$
2. $Q(f_2(x, a))$
3. $(\forall x(Q(x) \rightarrow P(x, y)))$
4. $(\forall x(R(x) \rightarrow (\exists y P(x, y))))$
5. $(\exists x(Q(x) \wedge (\forall y P(x, y))))$
6. $((\forall x R(x)) \rightarrow (\exists y P(x, y)))$
7. $(Q(a) \rightarrow (R(a) \vee Q(f_1(a))))$
8. $(\exists y(\exists x(Q(z) \wedge (\forall y P(z, w)))))$

Ejercicio 12:

Considerando el lenguaje de primer orden L_σ, cuyo vocabulario $\sigma = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, h^{(2)}, P^{(2)}, a\rangle$ consta de símbolos de función f, g y h; un símbolo de predicado, P y un símbolo de constante a. Sea la Interpretación $\mathcal{I}$: donde el universo es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}_0$ y la interpretación del vocabulario no lógico es como sigue:

$$\begin{array}{rcl} a^{\mathcal{I}} & = & 0 \\ f^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \text{ donde } f^{\mathcal{I}}(x) = x + 1 \\ g^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \text{ donde } g^{\mathcal{I}}(x, y) = x + y \\ h^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \text{ donde } h^{\mathcal{I}}(x, y) = x * y \\ P^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \text{ donde } P^{\mathcal{I}} = \{(x, y)/(x, y) \in {\mathbb{N}_0}^2 \wedge \text{“}x = y\text{”}\} \end{array}$$

Representar las siguientes propiedades:

1. El sucesor del cero no es igual a cero.
2. El cero es el neutro de la suma.
3. La suma es conmutativa.
4. La suma de x y el sucesor de y es igual al sucesor de la suma de x e y.
5. Todo número multiplicado por cero da cero.
6. El uno es el neutro de la multiplicación.

Ejercicio 13:

Sea el lenguaje de primer orden con **igualdad** L_σ, cuyo vocabulario $\sigma = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, P^{(1)}, Q^{(2)}, a, b\rangle$ consta de dos símbolos de función f y g; dos símbolos de predicado, P y Q, y dos símbolos de constante a y b. Las interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ son:

- *Interpretación* $\mathcal{I}_1$: El universo es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}_0$. La interpretación del vocabu-lario no lógico es como sigue:

$$\begin{array}{rcl}
a^{\mathcal{I}} & = & 0 \\
b^{\mathcal{I}} & = & 1 \\
f^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0,\ \text{donde } f^{\mathcal{I}}(x) = x+1 \\
g^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0,\ \text{donde } g^{\mathcal{I}}(x,y) = x+y \\
P^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0,\ \text{donde } P^{\mathcal{I}} = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge \text{“}x \text{ es par”}\} \\
Q^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,\ \text{donde } Q^{\mathcal{I}} = \{(x,y)/(x,y) \in {\mathbb{N}_0}^2 \wedge \text{“}x \text{ es un factor de } y\text{”}\}
\end{array}$$

- *Interpretación* $\mathcal{I}_2$: El universo es el conjunto A^* de todas las cadenas de símbolos sobre el alfabeto $A = \{$‘a’,‘b’,‘c’,...,‘x’,‘y’,‘z’$\}$. La interpretación del vocabulario no lógico es como sigue:

$$\begin{array}{rcl}
a^{\mathcal{I}} & = & \text{‘}a\text{’} \\
b^{\mathcal{I}} & = & \text{‘}b\text{’} \\
f^{\mathcal{I}} & : & A^* \longmapsto A^*,\ \text{donde } f^{\mathcal{I}}(x) = reversa(x) \\
g^{\mathcal{I}} & : & A^* \times A^* \longmapsto A^*\ \text{donde } g^{\mathcal{I}}(x,y) = concatenar(x,y) \\
P^{\mathcal{I}} & \subseteq & A^*,\ \text{donde } P^{\mathcal{I}} = \{x/x \in A^* \wedge \text{“}x \text{ es un palíndromo”}\} \\
Q^{\mathcal{I}} & \subseteq & A^* \times A^*,\ \text{donde } Q^{\mathcal{I}} = \{(x,y)/(x,y) \in (A^*)^2 \wedge \text{“}x \text{ es un anagrama de } y\text{”}\}
\end{array}$$

a) Representar los siguientes enunciados mediante fórmulas del cálculo de predicados, usando el lenguaje L_σ y la interpretación $\mathcal{I}_1$.

1. 0 es par pero 1 no es par.
2. El sucesor de 1 es par.
3. El sucesor de cualquier número par no es par.
4. La suma de un número par y un número impar es impar.
5. Cualquier número sumado al 0 es el mismo número.
6. 2 es un factor de 4.
7. Existen números tal que ninguno de sus factores es par.
8. Existe un número que sumado a cualquier número impar da como resultado un número impar.
9. El sucesor de un número nunca es un factor de ese número.

b) Tomar las fórmulas escritas en **a)** y expresar frases en castellano usando la interpretación $\mathcal{I}_2$. ¿Hay alguna frase verdadera, usando su conocimiento del mundo, bajo esta interpretación?

Ejercicio 14:

Sea el lenguaje de primer orden con igualdad L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, P^{(1)}, Q^{(2)}, a, b, c\rangle$, con dos símbolos de función f y g; dos símbolos de predicado, P y Q, y tres símbolos de constante

a, b y c y sea la interpretación $\mathcal{I}$, donde el universo E es el alfabeto de la lengua española.

$$
\begin{array}{rcl}
a^{\mathcal{I}} & = & \text{“}la\text{”} \\
b^{\mathcal{I}} & = & \text{“}ma\text{”} \\
c^{\mathcal{I}} & = & \text{“}ireo\text{”} \\
f^{\mathcal{I}} & : & E^* \longmapsto E^*, \text{ con } f^{\mathcal{I}}(x) = x \text{ si } |x| = 1 \text{ y el resultado de eliminar la primera letra en } x \text{, en otro caso} \\
g^{\mathcal{I}} & : & E^* \times E^* \longmapsto E^*, \text{ con } g^{\mathcal{I}}(x,y) = \text{la concatenación de } x \text{ e } y \\
P^{\mathcal{I}} & \subseteq & E^*, \text{ donde } P^{\mathcal{I}} = \{x/x \in E^* \wedge \text{ “}x \text{ es una palabra de la lengua española”}\} \\
Q^{\mathcal{I}} & \subseteq & E^* \times E^*, \text{donde } Q^{\mathcal{I}} = \{(x,y)/(x,y) \in (E^*)^2 \wedge \text{ “ } x \text{ es una subcadena de } y\text{”}\}
\end{array}
$$

Ejemplos: $f^{\mathcal{I}}$ (“hasta”) = “asta”, $g^{\mathcal{I}}$ (“por”, “cal”) = “porcal”, “topo”$\in P^{\mathcal{I}}$ y “opot”$\notin P^{\mathcal{I}}$, además (“amo”,“gamo”) $\in Q^{\mathcal{I}}$ y (“repta”,“paleta”) $\notin Q^{\mathcal{I}}$.

Representar los siguientes enunciados mediante fórmulas del cálculo de predicados, usando el lenguaje definido:

1. “la” es una subcadena de “lama”.
2. Hay palabras que concatenadas con si mismas no son subcadenas de otra.
3. “reo” está en el diccionario.
4. No todas las palabras del español tiene como subcadena a “la”.
5. Algunas palabras si se unen a otras forman secuencias que no pertenecen al idioma español.
6. “reo” forma parte de la palabra “mareo”.
7. Todas las palabras del español tienen una subcadena.