LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2025

PRÁCTICO 6: CÁLCULO DE PREDICADOS

Segunda Parte

Ejercicio 1:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, P^{(2)}, c \rangle$ consta de dos símbolos de función f_1, f_2, un símbolo de predicado P, y un símbolo de constante c. Decidir si las siguientes estructuras son adecuadas para ese vocabulario σ, donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales, y los símbolos $+, \leq, \geq, =$ representan las operaciones matemáticas habituales. Justifique en cada caso su respuesta.

1. $\langle \mathbb{N}, f, +, \leq, 2 \rangle$ donde $f(x) = x^2$.
2. $\langle \mathbb{N}, f, +, \geq, 2 \rangle$ donde $f(x) = x - 1$.
3. $\langle \mathbb{N}, f, +, \leq, 2 \rangle$ donde $f(x) = \sqrt{x}$.
4. $\langle \mathbb{N}, +, f, \geq, 2 \rangle$ donde $f(x) = x^2$.
5. $\langle \mathbb{N}, f, +, =, 2 \rangle$ donde $f(x) = 1$.

Ejercicio 2:

Sea L_σ un lenguaje de primer orden con *igualdad*, cuyo vocabulario $\sigma = \langle E^{(2)} \rangle$, con E un símbolo de predicado que significa "*hay un vuelo que me lleva de x a y*" y la estructura $\mathcal{A} = \langle X, E \rangle$. Donde $X = \{$Roma, París, New York, Pequín$\}$ y $E = \{$(Roma,París),(Roma,New York),(New York,París),(Pequín,Roma),(Pequín,París)$\}$.

a) Expresar en lenguaje natural las siguientes fórmulas

1. $(\exists x\ (E(x,y) \land \neg\, E(y,x)))$
2. $(\forall x\ E(x,y))$
3. $\neg(\exists x\ (E(x,x) \land E(y,x)))$
4. $(\exists y\ (E(x,y) \to (E(x,z) \land \neg = (y,z))))$
5. $\neg(\forall x\ (\forall y\ (E(x,y) \lor E(y,x))))$

b) Decidir si alguna de ellas se satisfacen en $\mathcal{A}$.

Ejercicio 3:

Dar los vocabulario y las interpretaciones para los siguientes lenguajes de primer orden, y traducir en cada caso las fórmulas presentadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

a) $(\forall x\ (\forall y\ (A(x,y) \to A(y,x))))$
$(\forall x\ A(y,x))$
$(\forall x\ (\forall y\ (\forall z\ ((A(x,y) \land A(y,z)) \to A(x,z)))))$

b) $(\forall x\ (\forall y\ (A(x,c) \to A(x, f(y)))))$
$(\forall x\ \neg\, A(x,x))$
$\neg\,(\forall x\ (\forall y\ A(x,y)))$

Ejercicio 4:

Sea L_σ un lenguaje de primer orden cuyo vocabulario $\sigma = \langle f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, P^{(2)}, c\rangle$ consta de dos símbolos de función f_1, f_2, un símbolo de predicado P, y un símbolo de constante c y la estructura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \bullet, +, =, 0\rangle$. Donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros, y los símbolos $+, \bullet, =, 0$ representan lo mismo que sus correlativos matemáticos.

a) Expresar en lenguaje natural las siguientes fórmulas

1. $((\exists x\, P(f_1(x,u),y)) \wedge (\exists v\, P(f_2(x,v),z)))$
2. $(\forall x\, (\forall y\, (P(x,y) \vee (\exists z\, P(f_2(x,z),y)))))$
3. $(\exists z\, (\neg P(z,c) \wedge P(f_2(x,z),y)))$
4. $(\exists y\, P(x, f_2(y,y)))$
5. $(\forall x\, (P(f_2(x,c),x)))$
6. $(\forall x\, (P(f_1(x,c),c)))$

b) Decidir si alguna de las fórmulas anteriores se satisfacen en $\mathcal{A}$ asumiendo, cuando sea necesario, $\beta(x) = 3, \beta(y) = 7, \beta(z) = 4, \beta(u) = 10, \beta(v) = 5$.

c) Alguna de las fórmulas anteriores cambian su valor de verdad si se cambia la función de asignación β? En caso de responder afirmativamente mostrarlo dando la β que corresponda en cada caso.

Ejercicio 5:

Sea L_σ un lenguaje de primer orden con vocabulario $\sigma = \langle f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, P^{(2)}, a\rangle$, con dos símbolos de función, un símbolo de predicado y uno de constante y considerando la interpretación detallada en el **Ejercicio 4**.

a) Decidir si alguna de las siguientes fórmulas se satisfacen en $\mathcal{A}$.

1. $(\forall x\, P(f_2(x,a),x))$
2. $(\forall x\, P(f_1(x,a),x))$
3. $(\forall x\, (\forall y\, (\exists z\, P(f_2(x,y),z))))$
4. $(\forall x\, (\forall y\, (P(f_2(x,a),y) \rightarrow P(f_2(y,a),x))))$
5. $(\exists x\, P(f_2(x,x), f_1(x,x)))$

c) Decidir si alguna de las fórmulas anteriores se satisfacen en $\mathcal{A}$, si se supone que la función $+$ representa la potencia ($+(x,y) = x^y$)

Ejercicio 6:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, P^{(1)}, Q^{(2)}, a\rangle$, consta de dos símbolos de función f y g, dos símbolos de predicado P y Q y un símbolo de constante a. Si consideramos la siguiente interpretación $\mathcal{I}$, cuyo dominio $\mathbb{N}_0$ denota el conjunto de los números naturales unión $\{0\}$ y la interpretación del vocabulario no lógico es:

$$\begin{array}{rcl}
a^{\mathcal{I}} & = & 0 \\
f^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \text{ donde } f^{\mathcal{I}}(x) = x+1 \\
g^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \text{ donde } g^{\mathcal{I}}(x,y) = x+y \\
P^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0, \text{ donde } P^{\mathcal{I}} = \{x / x \in \mathbb{N}_0 \wedge \text{“}x \text{ es par”}\} \\
Q^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \text{ donde } Q^{\mathcal{I}} = \{(x,y)/(x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \wedge \text{“}x \text{ es mayor que } y\text{”}\}
\end{array}$$

(a) Obtener, si es posible, el número natural denotado por cada uno de los siguientes términos:

1. $f(f(a))$
2. $g(a, a)$
3. $g(f(a), x)$
4. $f(g(f(a), f(f(a))))$
5. $f(g(g(x, f(z)), f(y)))$
6. $g(g(f(a), f(a)), g(f(a), f(f(a))))$

(b) Determinar si cada una de las siguientes fórmulas atómicas se satisface en $\mathcal{I}$.

1. $P(f(g(a, a)))$
2. $Q(a, f(a))$
3. $P(f(g(a, f(a))))$
4. $Q(f(a), a)$

(c) Determinar los valores de x para los cuales cada una de las siguientes fórmulas se satisface en $\mathcal{I}$.

1. $Q(f(f(a)), x)$
2. $P(g(f(a), x))$
3. $Q(x, f(x))$
4. $Q(f(f(x)), g(f(a), x))$
5. $Q(f(x), g(x, x))$

(d) Determinar si cada uno de los siguientes enunciados se satisfacen en $\mathcal{I}$:

1. $(\forall x\, P(g(x, x)))$
2. $(\exists x\, Q(f(x), g(x, x)))$
3. $(\forall x(\exists y\, Q(y, x)))$
4. $(\forall x(\forall y(= (f(x), f(y)) \rightarrow = (x, y))))$
5. $(\exists y(\forall x\, Q(y, x)))$
6. $(\exists x(P(x) \wedge P(f(x))))$
7. $(\forall x(P(x) \rightarrow P(f(f(x)))))$
8. $(\exists x(\forall y\, Q(f(y), g(x, y))))$

Ejercicio 7:

Sea el lenguaje con igualdad de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, P^{(1)}, Q^{(2)}, a, b, c\rangle$, con dos símbolos de función f y g; dos símbolos de predicado, P y Q, y tres símbolos de constante a, b y c, y sea la interpretación $\mathcal{I}$ donde el universo es E^*, con E el alfabeto de la lengua española.

$$\begin{array}{lcl}
a^{\mathcal{I}} & = & \text{“}la\text{”} \\
b^{\mathcal{I}} & = & \text{“}ma\text{”} \\
c^{\mathcal{I}} & = & \text{“}ireo\text{”} \\
f^{\mathcal{I}} & : & E^* \longmapsto E^*, \text{ con } f^{\mathcal{I}}(x) = x \text{ si } |x| = 1 \text{ y el resultado de eliminar la primera letra en } x \text{, en otro caso} \\
g^{\mathcal{I}} & : & E^* \times E^* \longmapsto E^*, \text{ con } g^{\mathcal{I}}(x, y) = \text{la concatenación de } x \text{ e } y \\
P^{\mathcal{I}} & \subseteq & E^*, \text{ donde } P^{\mathcal{I}} = \{x / x \in E^* \wedge \text{“}x \text{ es una palabra de la lengua española”}\} \\
Q^{\mathcal{I}} & \subseteq & E^* \times E^*, \text{donde } Q^{\mathcal{I}} = \{(x, y) / (x, y) \in (E^*)^2 \wedge \text{“ } x \text{ es una subcadena de } y\text{”}\}
\end{array}$$

Hallar $\mathcal{I}(\varphi)$ para la fórmula bien formada $\varphi \in L_\sigma$, siendo en cada caso:

1.	$\varphi = P(a)$	8.	$\varphi = P(b)$
2.	$\varphi = P(c)$	9.	$\varphi = P(f(a))$
3.	$\varphi = P(f(b))$	10.	$\varphi = P(f(c))$
4.	$\varphi = P(g(a,b))$	11.	$\varphi = P(g(a,c))$
5.	$\varphi = P(g(b,c))$	12.	$\varphi = P(g(f(b),c))$
6.	$\varphi = P(g(f(c),f(b)))$	13.	$\varphi = (\forall x\, Q(x,x))$
7.	$\varphi = (\exists x\, Q(x,f(x)))$		

Ejercicio 8:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f_1^{(2)}, P^{(2)}, Q^{(2)}, R^{(1)}, c_1, c_2\rangle$ consta de un símbolo de función f_1, tres símbolos de predicado, P, Q y R, y dos símbolos de constantes c_1 y c_2. Sea la estructura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, <, =, \mathsf{A}, 3, 10\rangle$, con $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, los símbolos se corresponden con los matemáticos y $\mathsf{A}(x)$ se interpreta como " x pertenece a A" y $\mathsf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinar el valor de verdad de cada uno de los enunciados siguientes:

1. $(\exists x\, (\mathsf{A}(x) \;\wedge\; = (+(x,3), 10)))$
2. $(\forall x\, (\mathsf{A}(x) \;\rightarrow\; < (+(x,3), 10)))$
3. $(\forall x\, (\mathsf{A}(x) \;\wedge\; < (+(x,3), 10)))$
4. $(\exists x\; = (+(+(x,y),3), 10))$

Ejercicio 9:

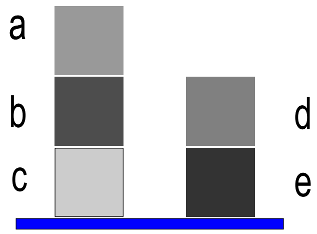
Usando el lenguaje L_σ, definido en el **Ejercicio 13** del práctico 5, expresar en lenguaje natural cada uno de los siguientes enunciados bajo la interpretación $\mathcal{I}_1$ y luego bajo la $\mathcal{I}_2$. Determinar el valor de verdad de cada uno de ellos en cada interpretación.

1. $(\forall x\, Q(b,x))$
2. $(\exists x\, Q(x,f(x)))$
3. $(\forall x\, P(g(x,x)))$
4. $(\forall x\, Q(x,f(x)))$
5. $(\forall x(P(x) \rightarrow (\forall y(Q(x,y) \rightarrow P(y)))))$

Ejercicio 10:

Sea un lenguaje de primer orden con igualdad L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle P^{(2)}, R^{(1)}, c\rangle$ consta de dos símbolos de predicado, P y R, y un símbolo de constante c. Sea la estructura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{B}, Sobre, SoMe, a\rangle$, con $\mathbb{B}$ el universo de bloques (cada bloque es individualizado por medio de una letra minúscula), $Sobre(x,y)$ se satisface cuando "el bloque x está sobre el bloque y", $SoMe(x)$ equivale a decir que "el bloque x está apoyado sobre la mesa", y la constante c se corresponde con el bloque a. Determinar el valor de verdad de cada uno de los enunciados siguientes si la definición por extensión de $Sobre$ y $SoMe$ corresponde a lo mostrado de la figura:

1. $SoMe(a)$
2. $(\forall x\ SoMe(x))$
3. $(\exists x\ (SoMe(x) \wedge (\exists y\ Sobre(y,x))))$
4. $(\forall x\ Sobre(x,a)))$
5. $(\forall x(\exists y\ Sobre(x.y)))$
6. $(\exists x\ Sobre(a,x))$
7. $(\forall x(SoMe(x) \rightarrow (\exists y(Sobre(y,x) \rightarrow \neg SoMe(y)))))$



Ejercicio 11:

Sea L_σ el lenguaje de primer orden del **Ejercicio 1**, y sea $\mathcal{A}$ la siguiente estructura adecuada: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, f, +, =, 0\rangle$, donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros y $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es la función definida por $f(x) = x + 1$, y los demás símbolos se corresponden con los matemáticos.

Sea $\beta : Var \longrightarrow \mathbb{Z}$ la siguiente asignación: $\beta(x_i) = 2 \times i$.

Interpretar las siguientes expresiones:

1. $f_1(f_2(x_1, x_2))$
2. $f_2(f_1(x_1), f_1(x_3))$
3. $(\forall x_1(\exists x_2\ P(x_1, x_2)))$
4. $f_1(f_2(f_1(x_3), x_5))$
5. $P(f_1(f_1(x_1)), c)$
6. $(\exists x_1\ P(f_1(x_1), f_2(x_1, x_2)))$
7. $P(f_2(f_1(f_1(c)), x_9), f_1(f_1(x_9)))$

Ejercicio 12:

Sea la siguiente fórmula de un lenguaje primer orden L_σ con vocabulario adecuado.

$$(\forall x_1\ A(x_1) \rightarrow A(f_1(x_1)))$$

¿Existe una interpretación en la que dicha fórmula se interprete como un enunciado falso? Si su respuesta es afirmativa, describir tal interpretación en detalle. En otro caso explicar porqué no es posible encontrar una.

Ejercicio 13:

Sea el lenguaje con igualdad L_σ con vocabulario $\sigma = \langle f, \leq, 0\rangle$, y sean las siguientes σ-estructuras $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, f^{\mathcal{R}}, \leq^{\mathcal{R}}, 0^{\mathcal{R}}\rangle$ y $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{Z}}, \leq^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}\rangle$, donde $\mathbb{R}$ son los números reales y $\mathbb{Z}$ los números enteros. Dar un solo enunciado $\varphi \in L_\sigma$ tal que:

- En $\mathcal{R}$, φ se satisface.
- En $\mathcal{Z}$, φ no se satisface.

Ejercicio 14:

Sea L_σ el lenguaje definido en el **Ejercicio 2**; considerando la misma interpretación, dar una fórmula φ que se satisfaga en ella y una fórmula ψ que no se satisfaga. Agregar las hipótesis que considere necesarias.

Ejercicio 15:

Sea L_σ un lenguaje con vocabulario $\sigma = \langle \leq^{(2)} \rangle$ (con igualdad) y dadas $\mathcal{A}_1 = \langle \{a_1, \ldots, a_6\}, \leq^{\mathcal{A}_1} \rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle \{a_1, \ldots, a_6\}, \leq^{\mathcal{A}_2} \rangle$. Sabiendo además que:

$\leq^{\mathcal{A}_1} = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_5), (a_4, a_6), (a_5, a_6)\}$

$\leq^{\mathcal{A}_2} = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_5), (a_2, a_5), (a_3, a_4), (a_4, a_6), (a_5, a_6)\}$

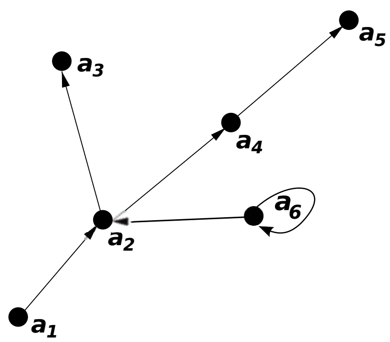
Dar un enunciado φ, tal que:

- $\mathcal{A}_1 \models \varphi$ y $\mathcal{A}_2 \not\models \varphi$.
- $\mathcal{A}_1 \not\models \varphi$ y $\mathcal{A}_2 \models \varphi$.

Ejercicio 16:

Considere el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{A}$. Encontrar una fórmula de primer orden que *"identifique"* [1] a cada uno de los elementos a_i : $\varphi_i(x)$ en un lenguaje con igualdad L_σ con vocabulario $\sigma = \langle \leq^{(2)} \rangle$, es decir tal que:

$$\mathcal{A} \models_\beta \varphi_i(x) \text{ si y sólo si } \beta(x) = a_i.$$



Ejercicio 17:

Sea el lenguaje L_σ y la interpretación del mismo definidos en el **Ejercicio 10**, caracterice cada uno de los bloques del universo, de forma tal que cada bloque satisfaga sólo una fórmula, es decir: $\varphi_a(x)$ se satisface sólo si $\beta(x) = a$, lo mismo para $\varphi_b(x)$ cuando $\beta(x) = b$, y así para cada bloque.

Ejercicio 18:

Demostrar, utilizando árboles de refutación, si las siguientes fórmulas de un lenguaje de primer orden son universalmente válidas. Para todos los casos en que no sea posible demostrarlo por ese método, ¿se podría asegurar que las fórmulas no son universalmente válidas? Para aquellas fórmulas que, según usted, no sean universalmente válidas muestre un contra ejemplo que lo confirme.

[1] Que identifique a un a_i significa que la fórmula que se escriba debe tener una variable libre y *sólo* se satisface cuando el valor de esa variable es a_i. En este caso debe escribir 6 fórmulas.

1. $(((\forall x(P(x) \vee Q(x))) \wedge (\exists x\, \neg P(x))) \rightarrow (\exists x\, Q(x)))$

2. $(((\forall x(P(x) \vee Q(x))) \wedge \neg(\forall x\, P(x))) \rightarrow (\forall x\, Q(x)))$

3. $(((\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))) \rightarrow (\exists x(P(x) \wedge Q(x))))$

4. $((\forall x\, (R(x) \wedge S(x))) \rightarrow ((\forall x\, R(x)) \wedge (\forall x\, S(x))))$

5. $(((\forall x\, R(x)) \wedge (\forall x\, S(x))) \rightarrow (\forall x\, (R(x) \wedge S(x))))$

6. $((\forall x(R(x) \vee S(x))) \rightarrow ((\forall x\, R(x)) \vee (\forall x\, S(x))))$

7. $((((\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, \neg P(x))) \wedge P(a)) \rightarrow P(b))$

8. $(((\forall x\, S(x,a,x)) \wedge (\forall x(\forall y(\forall z(S(x,y,z) \rightarrow S(x,f(y),f(z))))))) \rightarrow S(f(a),f(a),f(f(a))))$

9. $(((\forall x(A(x,b) \rightarrow A(a,x))) \wedge A(b,b)) \rightarrow A(a,a))$

Ejercicio 19:

Dadas las fbfs siguientes:

a) $((\forall x\, (\forall y\, P(x,y))) \rightarrow (\forall x\, (\forall y\, P(y,x))))$

b) $(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$

c) $(P(f(x)) \rightarrow P(x))$

d) $(\forall x(\, P(x) \rightarrow P(f(x))))$

Determinar para cada una de ellas si es

1. Universalmente válida.
2. Válida en una interpretación pero no universalmente válida.
3. Satisfacible pero no válida en ninguna interpretación.

Especifique las hipótesis que considere necesarias.

Ejercicio 20:

Mostrar una fórmula bien formada que satisfaga cada una de las siguientes condiciones:

a) Universalmente válida.

b) Válida en una interpretación pero no universalmente válida.

c) Satisfacible pero no válida en ninguna interpretación.

Especifique las hipótesis que considere necesarias.