LÓGICA PARA COMPUTACIÓN

Año 2025

PRÁCTICO 4: CÁLCULO PROPOSICIONAL

SISTEMAS FORMALES

Resolución de ejercicios

Se muestra aquí una resolución para cada uno de los ejercicios del práctico,esto no quiere decir que no existan otras formas de resolverlos, ni que las que se muestran sean las mejores formas de hacerlo. Estas resoluciones se muestran sólo a modo de ejemplificar *una posible solución*, ni la *única*, ni la *mejor*.

Ejercicio 1:

Demostrar, en $\mathcal{L}$, que cada una de las siguientes *fbfs* son teoremas [1].

1. $((p_1 \to p_2) \to (((\neg p_1) \to (\neg p_2)) \to (p_2 \to p_1)))$

1) $(\underbrace{(\neg p_1 \to \neg p_2) \to ((p_1 \to p_2)}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(p_1 \to p_2)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{(\neg p_1 \to \neg p_2) \to (p_2 \to p_1)}_{\mathcal{A}})))$ Axioma *L1*.

2) $((\underbrace{\neg p_1}_{\neg\mathcal{A}} \to \underbrace{\neg p_2}_{\neg\mathcal{B}}) \to (p_2 \to p_1))$ Axioma *L3*.

3) $((p_1 \to p_2) \to ((\neg p_1 \to \neg p_2) \to (p_2 \to p_1)))$ M. Ponens 1) y 2).

$\square$

2. $(((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3)))$

1) $((\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{p_2}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{p_3}_{\mathcal{C}})) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)))$ Axioma *L2*.

2) $((\underbrace{(p_1 \to (p_2 \to p_3))}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(p_1 \to p_2)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{(p_1 \to p_3)}_{\mathcal{C}})) \to (((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2))$

$\to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))))$ Axioma *L2*.

3) $(((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3)))$ M. Ponens 1) y 2).

$\square$

Ejercicio 2:

Primeramente debemos formalizar el razonamiento mediante fórmulas, para ello definiremos las variables proposicionales p_1, p_2, p_3, p_4:

p_1 : Tenemos una buena especificación
p_2 : Obtenemos un diseño correcto
p_3 : Obtenemos un buen programa
p_4 : Nuestro programador es mediocre

[1] **Convención:** En la resolución de los ejercicios, para simplificar la notación, eliminamos los paréntesis de las fórmulas negadas. Escribimos, por ejemplo, $\neg\mathcal{A}$ en lugar de $(\neg\mathcal{A})$.

Las fórmulas que representan la argumentación son:

$P_1 : (p_1 \to p_2)$

$P_2 : ((p_2 \wedge (\neg p_4)) \to p_3)$ que es $\equiv (p_2 \to ((\neg p_4) \to p_3))$

$P_3 : (\neg\, p_4)$

$C : (p_1 \to p_3)$

Se debe demostrar que : $\{(p_1 \to p_2), (p_2 \to ((\neg p_4) \to p_3)), (\neg\, p_4)\} \vdash_{\mathcal{L}} (p_1 \to p_3)$

1) $(p_1 \to p_2)$ Hipótesis.

2) $(p_2 \to ((\neg p_4) \to p_3))$ Hipótesis.

3) $(\underbrace{(p_2 \to ((\neg p_4) \to p_3))}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{p_1}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{(p_2 \to ((\neg p_4) \to p_3))}_{\mathcal{A}}))$ Axioma *L1*.

4) $((\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{p_2}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{((\neg p_4) \to p_3)}_{\mathcal{C}})) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to ((\neg p_4) \to p_3))))$ Axioma *L2*.

5) $(p_1 \to (p_2 \to ((\neg p_4) \to p_3)))$ M. Ponens 2) y 3).

6) $((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to ((\neg p_4) \to p_3)))$ M. Ponens 4) y 5).

7) $(p_1 \to ((\neg p_4) \to p_3))$ M. Ponens 1) y 6).

8) $((\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(\neg p_4)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{p_3}_{\mathcal{C}})) \to ((p_1 \to (\neg p_4)) \to (p_1 \to p_3)))$ Axioma *L2*.

9) $((p_1 \to (\neg p_4)) \to (p_1 \to p_3))$ M. Ponens 7) y 8).

10) $(\underbrace{(\neg p_4)}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{p_1}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{(\neg p_4)}_{\mathcal{A}}))$ Axioma *L1*.

11) $(\neg\, p_4)$ Hipótesis.

12) $(p_1 \to (\neg p_4))$ M. Ponens 10) y 11).

13) $(p_1 \to p_3)$ M. Ponens 9) y 12).

$\square$

Ejercicio 3:

Demostrar, en $\mathcal{L}$, que cada una de las siguientes *fbfs* son teoremas

1. $(p_1 \to p_1)$

1) $(\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{p_1}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{p_1}_{\mathcal{A}}))$ Axioma *L1*.

2) $(\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(p_1 \to p_1)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{p_1}_{\mathcal{A}}))$ Axioma *L1*.

3) $((\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(p_1 \to p_1)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{p_1}_{\mathcal{C}})) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_1 \to p_1)))$ Axioma *L2*.

4) $((p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_1 \to p_1))$ M. Ponens 2) y 3).

5) $(p_1 \to p_1)$ M. Ponens 1) y 4).

$\square$

2. $((\neg p_1) \to (p_1 \to p_2))$

1) $((\underbrace{\neg p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(\neg p_2 \to \neg p_1)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{(p_1 \to p_2)}_{\mathcal{C}})) \to ((\neg p_1 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)) \to$

$(\neg p_1 \to (p_1 \to p_2))))$ Axioma *L2*.

2) $(\underbrace{((\neg p_2 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_2))}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{\neg p_1}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{((\neg p_2 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_2))}_{\mathcal{A}}))$ Axioma *L1*.

3) $((\underbrace{\neg p_2}_{\neg\mathcal{A}} \to \underbrace{\neg p_1}_{\neg\mathcal{B}}) \to (p_1 \to p_2))$ Axioma *L3*.

4) $(\neg p_1 \to ((\neg p_2 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_2)))$ M. Ponens 3) y 2).

5) $((\neg p_1 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)) \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_2)))$ M. Ponens 4) y 1).

6) $(\underbrace{\neg p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{\neg p_2}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{\neg p_1}_{\mathcal{A}}))$ Axioma *L1*.

7) $(\neg p_1 \to (p_1 \to p_2))$ M. Ponens 6) y 5).

$\square$

3. $((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))$

1) $((\underbrace{(p_1 \to (p_1 \to p_2))}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(p_1 \to p_1)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{(p_1 \to p_2)}_{\mathcal{C}})) \to (((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)) \to$

$((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))))$ Axioma *L2*.

2) $((\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{p_1}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{p_2}_{\mathcal{C}})) \to ((p_1 \to p_1) \to (p_1 \to p_2)))$ Axioma *L2*.

3) $(((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)))$ M. Ponens 2) y 1).

4) $((\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(p_1 \to p_2)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{p_1}_{\mathcal{C}})) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)))$ Axioma *L2*.

5) $(\underbrace{p_1}_{\mathcal{A}} \to (\underbrace{(p_1 \to p_2)}_{\mathcal{B}} \to \underbrace{p_1}_{\mathcal{A}}))$ Axioma *L1*.

6) $((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1))$ M. Ponens de 5) y 4).

7) $((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))$ M. Ponens de 6) y 3).

$\square$

Ejercicio 4:

Demostrar que para *fbfs* cualesquiera $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$ es posible deducir lo que sigue:

En donde sea conveniente, usar el Teorema de Deducción o su recíproco.

1. $\{(\neg\mathcal{A})\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$

1) $(\neg\mathcal{A} \to (\neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}))$ Axioma *L1*.

2) $((\neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$ Axioma *L3*.

3) $\neg\mathcal{A}$ Hipótesis.

4) $(\neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A})$ Modus Ponens 3) y 1).

5) $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ Modus Ponens 4) y 2).

□

2. $\{(\neg(\neg\mathcal{A}))\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{A}$

1) $(\neg\neg\mathcal{A} \to (\neg\neg\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{A}))$ Axioma *L1*.

2) $\neg\neg\mathcal{A}$ Hipótesis.

3) $(\neg\neg\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{A})$ Modus Ponens 2) y 1).

4) $((\neg\neg\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\neg\mathcal{A}))$ Axioma *L3*.

5) $(\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\neg\mathcal{A})$ Modus Ponens 3) y 4).

6) $((\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\neg\mathcal{A}) \to (\neg\neg\mathcal{A} \to \mathcal{A}))$ Axioma *L3*.

7) $(\neg\neg\mathcal{A} \to \mathcal{A})$ Modus Ponens 5) y 6).

8) $\mathcal{A}$ Modus Ponens 2) y 7).

□

3. $\{(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})), \mathcal{B}\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$

Si usamos el recíproco del Teorema de Deducción, demostrar $\{(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})), \mathcal{B}\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$ es equivalente a demostrar que $\{(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})), \mathcal{B}, \mathcal{A}\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{C}$, entonces:

1) $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ Hipótesis.

2) $\mathcal{A}$ Hipótesis.

3) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ M. Ponens 2) y 1).

4) $\mathcal{B}$ Hipótesis.

5) $\mathcal{C}$ M. Ponens 4) y 3).

□

4. $\vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{B} \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))$

1) $((\neg\neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \neg\neg\mathcal{B}))$ Axioma *L3*.

2) $(\neg\neg \underbrace{\neg\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \rightarrow \underbrace{\neg\mathcal{B}}_{\mathcal{A}})$ Por lo demostrado en el Ejercicio **3.2** (Paso 7).

3) $(\mathcal{B} \rightarrow \neg\neg\mathcal{B})$ M. Ponens 2) y 1).

$\square$

5. $\{(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), ((\neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow (\neg\mathcal{A}))\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})$

1) $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$ Axioma *L2*.

2) $((\neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \neg\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})))$ Axioma *L3*.

3) $((\neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow \neg\mathcal{A})$ Hipótesis.

4) $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$ M. Ponens 3) y 2).

5) $((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$ M. Ponens 4) y 1).

6) $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ Hipótesis.

7) $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})$ M. Ponens 6) y 5).

$\square$

6. $\{(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})$

1) $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$ Axioma *L2*.

2) $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})))$ Axioma *L1*.

3) $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ Hipótesis.

4) $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})))$ M. Ponens 3) y 2).

5) $((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$ M. Ponens 4) y 1).

6) $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ Hipótesis.

7) $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})$ M. Ponens 6) y 5).

Nota: Este ejercicio nos dice que si $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ y $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ son ambas verdaderas, entonces también lo será $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})$. Este resultado se conoce como regla del *silogismo hipotético* y de ahora en más haremos uso de ella como una regla de inferencia adicional.

$\square$

7. $\{(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$

1) $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$ Hipótesis.

2) $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$ Axioma *L2*.

3) $((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$ M. Ponens 1) y 2).

4) $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}))$ Axioma *L1*.

5) $(\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$ Silogismo Hipotético 4) y 3).

Otra manera de demostrar que $\{(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}))\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$, sería a partir de lo que ya resolvimos en el Ejercicio **3.3**:

$$\{(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})), \mathcal{B}\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$$

ya que luego, por Teorema de Deducción, tendríamos que:

$$\{(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}))\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})).$$

□

Ejercicio 5:

Utilizando, cuando sea conveniente, el Teorema de Deducción o su recíproco demostrar que las siguientes *fbfs* son teoremas de $\mathcal{L}$, siendo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ *fbfs* cualesquiera de $\mathcal{L}$:

1. $((\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to ((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})))$

1) $(\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ Hipótesis.

2) $(\neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B})$ Por lo demostrado en el Ejercicio **3.2**.

3) $(\neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ Silogismo Hipotético 2) y 1).

4) $(\neg\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{A})$ Por lo demostrado en el Ejercicio **3.2**.

5) $((\neg\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{A}) \to (\mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{A}))$ Axioma *L3*.

6) $(\mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{A})$ M. Ponens 4) y 5).

7) $(\neg\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{A})$ Silogismo Hipotético 3) y 6).

8) $((\neg\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}))$ Axioma *L3*.

9) $(\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$ M. Ponens 7) y 8).

Como hemos demostrado que $\{(\mathcal{B} \to \mathcal{A})\} \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$, por Teorema de Deducción hemos demostrado que: $\vdash_{\mathcal{L}} ((\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$, c.q.d.

□

2. $((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$

1) $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ Hipótesis.

2) $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$ Hipótesis.

3) $\mathcal{A}$ Hipótesis.

4) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ M. Ponens 2) y 3).

5) $\mathcal{B}$ M. Ponens 1) y 3).

6) $\mathcal{C}$ M. Ponens 4) y 5).

Como hemos demostrado que $\{(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})), \mathcal{A}\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{C}$, por Teorema de Deducción hemos demostrado que: $\vdash_{\mathcal{L}} ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$, c.q.d.

□

3. $((\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$

Podemos usar el recíproco del Teorema de Deducción, y en lugar de demostrar la fórmula original podemos demostrar que $\{\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B})\} \vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$, lo que es equivalente; luego:

1) $\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ Hipótesis.

2) $((\mathcal{B} \to \underbrace{(\mathcal{A} \to \mathcal{B})}_{\mathcal{A}}) \to (\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \neg\mathcal{B}))$ Por lo demostrado en el Ejercicio anterior.

3) $(\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$ Axioma *L1*.

4) $(\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \neg\mathcal{B}))$ M. Ponens 3) y 2).

5) $\neg\mathcal{B}$ M. Ponens 1) y 4).

6) $(\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$ Por Teorema de Deducción sobre lo demostrado en el Ejercicio **3.1**.

7) $(\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ M. Ponens 5) y 6).

$\square$

4. $(\mathcal{A} \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B}))$

1) $\mathcal{A}$ Hipótesis.

2) $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ Hipótesis.

3) $\mathcal{B}$ M. Ponens 1) y 2).

Como hemos demostrado que $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A} \to \mathcal{B})\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{B}$, por Teorema de Deducción hemos demostrado que: $\vdash_{\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B})$, c.q.d.

$\square$

5. $(((((\neg\mathcal{A}) \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to \mathcal{C})$

1) $(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ Hipótesis.

2) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ Hipótesis.

3) $(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{C})$ Silogismo Hipotético 1) y 2).

4) $(\mathcal{A} \to \mathcal{C})$ Hipótesis.

5) $((\mathcal{A} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{A}))$ Por lo demostrado en el Ejercicio **4.1**.

6) $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{A})$ M. Ponens 4) y 5).

7) $((\neg\mathcal{A} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\neg\mathcal{A}))$ Por lo demostrado en el Ejercicio **4.1**.

8) $(\neg\mathcal{C} \to \neg\neg\mathcal{A})$ M. Ponens de 3) y 7).

9) $(\neg\neg\mathcal{A} \to (\neg\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$ Por lo demostrado en el Ejercicio **3.1**.

10) $(\neg\mathcal{C} \to (\neg\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$ Silogismo Hipotético 8) y 9).

11) $((\neg\mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{A} \to \mathcal{C}) \to ((\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{C})))$ Axioma *L2*.

12) $((\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{C}))$ M. Ponens 10) y 11).

13) $(\neg\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ M. Ponens 6) y 12).

14) $((\neg\mathcal{C} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C})$ Teorema de la Proposición 2.11. b) del libro.

15) $\mathcal{C}$ M. Ponens 13) y 14).

Como hemos demostrado que $\{(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{A} \to \mathcal{C}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{C}$, por Teorema de Deducción hemos demostrado que: $\vdash_{\mathcal{L}} (((((\neg\mathcal{A}) \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to \mathcal{C})$, c.q.d.

Podemos demostrar que $\{(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{A} \to \mathcal{C}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{C}$ más brevemente:

1) $(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ Hipótesis.

2) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ Hipótesis.

3) $(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{C})$ Silogismo Hipotético de 1) y 2).

4) $(\mathcal{A} \to \mathcal{C})$ Hipótesis.

5) $((\mathcal{A} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{A}))$ Por lo demostrado en el Ejercicio **4.1**.

6) $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{A})$ M. Ponens 4) y 5).

7) $(\neg\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ Silogismo Hipotético 6) y 3).

14) $((\neg\mathcal{C} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C})$ Teorema de la Proposición 2.11. b) del libro.

15) $\mathcal{C}$ M. Ponens 13) y 14).

Como antes, hemos demostrado que $\{(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{A} \to \mathcal{C}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{C}$ y sabemos que por Teorema de Deducción hemos demostrado que: $\vdash_{\mathcal{L}} (((((\neg\mathcal{A}) \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to \mathcal{C})$, c.q.d.

□

Ejercicio 6:

2. Demostrar en $\mathcal{L}_1$ que $\vdash_{\mathcal{L}_1} (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$

$\vdash_{\mathcal{L}_1} (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$

1) $((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A}))$ Hipótesis.

2) $\mathcal{A}$ Hipótesis.

3) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A})) \to (((\neg\mathcal{B}) \to \mathcal{A}) \to \mathcal{B}))$ Ax3.

4) $(\mathcal{A} \to ((\neg\mathcal{B}) \to \mathcal{A}))$ Ax1.

5) $(((\neg\mathcal{B}) \to \mathcal{A}) \to \mathcal{B})$ M. Ponens 1) y 3).

6) $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ Silogismo Hipotético 4) y 5).

7) $\mathcal{B}$ M. Ponens 2) y 6).

Así, con los pasos 1) - 7) demostramos que $\{((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A})), \mathcal{A}\} \vdash_{\mathcal{L}_1} \mathcal{B}$, luego, si aplicamos el Teorema de Deducción dos veces obtenemos que $\vdash_{\mathcal{L}_1} (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$ que era lo que queríamos demostrar. c.q.d. □