El Teorema de Incompletitud de Gödel

1. Introducción

En 1931, Kurt Gödel (1906-1978), con veinticinco años de edad, alumno de la Universidad de Viena, publica en una revista científica alemana el trabajo *Über formal inentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, (**Sobre las Proposiciones Formalmente Indecidibles de los Principia Mathematica y Sistemas Conexos**). Este teorema demuestra que en cualquier sistema matemático hay proposiciones que no pueden ser probadas ni rechazadas dentro de un sistema axiomático. Resultó ser un hito en la historia de las matemáticas, dado que por mucho tiempo se había intentado establecer un sistema axiomático en el que se pudieran basar todas las matemáticas.

Comprender que los métodos matemáticos aceptados desde la época de Euclides, no eran adecuados para demostrar *todas las verdades matemáticas*, provocó una revolución que no sólo afectó al área en cuestión, sino que cimentó la ciencia de la computación. En esa época, el razonamiento del teorema era tan nuevo, que sólo los que se hallaban relacionados estrechamente a la literatura técnica podían comprender y seguir plenamente la línea argumentativa de Gödel.

Actualmente, las conclusiones establecidas por Gödel constituyen una verdadera revolución y tienen, además, profunda significación filosófica. Gödel integró el Círculo de Viena, pero justamente su falta de acuerdo con la visión positivista y su convencimiento de que hay muchos conceptos a los cuales el ser humano accede por intuición, lo llevaron a considerar que tal filosofía eran un pie para profundizar en las matemáticas.

En 1952, la Universidad de Harvard, lo invistió como doctor honoris causa, manifestando que esta obra había sido uno de los avances más importantes en el campo de la Lógica que se había realizado en los tiempos modernos, aunque en el momento en que se publicó, algunos pocos matemáticos se dedicaban a esta disciplina

La obra de Alfred North Whitehead (1861-1947) y Bertrand Russell (1872-1970), *Principia Mathematica* (1910-1913), compuesta de tres vólumenes, referida a la lógica matemática y los fundamentos de las matemáticas, era un intento de axiomatización de las matemáticas. Esta idea también fue estudiada por David Hilbert (1862-1943), quién publicó en 1899 *Fundamentos de la Geometría*, que sustituye los tradicionales axiomas de Euclides por sistema formal de 21 axiomas, los cuales evitan las debilidades identificadas en los de Euclides (cuya obra *Elementos* seguía siendo usada como libro de texto en aquel momento). El enfoque de Hilbert marcó el cambio al sistema axiomático moderno. En el Congreso Internacional de Matemáticas de París de 1900, Hilbert publicó veintitrés problemas matemáticos que eran importantes resolver para las matemáticas. Uno de sus cuestionamientos fue si las matemáticas son decidibles; es decir, ¿hay un método definido que pueda aplicarse a cualquier enunciado matemático y que nos diga si es cierto o no? Esta pregunta fue respondida por Alan Turing (1912-1954) en 1936 cuando construyó un modelo formal de máquina, *Máquina de Turing*, y demostró que hay problemas que la máquina no puede resolver.

Otras preguntas que Hilbert presentó fueron: ¿es la matemática completa?; es decir, ¿cualquier enunciado puede ser demostrado o refutado? Además, ¿es la matemática consistente?; es decir, no es posible demostrar por métodos válidos, enunciados falsos o contradictorios. Fue Gödel quien respondió a estas dos preguntas, demostrando que cualquier sistema formal suficientemente potente es inconsistente o incompleto.

En 1920 Hilbert propuso de forma explícita un proyecto de investigación (en *metamatemática*, como se llamó entonces) que acabó siendo conocido como ***Programa de Hilbert***. Este programa consiste en la formalización total del razonamiento matemático y su culminación sería la demostración de la consistencia de las matemáticas, es decir, la prueba formal de que las matemáticas no son un sistema contradictorio.

Al llegar el año 1930, la tarea central era la demostración de la consistencia del análisis clásico, que puede ser visto como una extensión de la aritmética. Así, a mediados de 1930, un joven Kurt Gödel se propuso, asumiendo (groso modo) la consistencia de la aritmética, intentar demostrar la consistencia del análisis clásico. Mientras más trabajaba en el problema, más consciente se iba haciendo de que el proyecto era imposible. Y así, por esas ironías del destino, quien estuvo más cerca de llevar a cabo el programa de Hilbert fue precisamente quien le dio el tiro de gracia. Así nacía el, sin duda, más famoso teorema de la lógica matemática.

En 1928, Gödel en su tesis doctoral demostró la *completitud* de los sistemas formales de primer orden. Por el mismo, la pregunta, ¿sería realmente posible demostrar todo cuanto fuera verdadero para todas las interpretaciones válidas de símbolos? Gödel demostró que así era, los principios de la lógica desarrollados hasta aquel momento eran adecuados para el propósito destinado: demostrar todo cuanto fuera verdadero basándose en un sistmea axiomático; este resultado se conoce ahora como el *Teorema de completitud de Gödel*. La estocada final fue que no demostraba que todo enunciado verdadero referente a los números naturales, pudiera demostrarse a partir de los axiomas aceptados en la teoría de números.

En su trabajo titulado *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y Sistemas afines* (en castellano), de modestas 25 páginas, escrito el año 1930 y publicado en 1931, Gödel demostró que debe haber enunciados concernientes a los números naturales que son verdaderos, pero que no pueden ser demostrados; es decir, responden a la teoría axiomática pero son indemostrables. Si todos los enunciados verdaderos se tomaran como axiomas, se podría eludir esta "incompletitud" pero Gödel demostró que siempre que los axiomas puedan ser caracterizados por un sistema de reglas, resulta indiferente cuáles sean los axiomas, porque aún así habrá enunciados acerca de los números naturales que no se podrán demostrar. Además, respecto de la consistencia, se debía apelar a elementos más fuertes que los axiomas en sí.

Hilbert estaba trabajando en un programa que fijaba los fundamentos de las matemáticas por medio de un proceso autoconstructivo, por el cual la consistencia de las teorías matemáticas complejas pudiera deducirse de la consistencia de teorías más sencillas y evidentes. Gödel quiso mostrar que su teorema de incompletitud apuntaba a que la deducción de teoremas no pueden mecanizarse, con lo cual el trabajo de Hilbert quedó truncado.

Con esto, se dejó en claro que los métodos matemáticos usados desde la época de Euclides, no eran adecuados para demostrar las verdades relacionadas a los números naturales. Los principios de la Lógica desarrollados hasta el momento, eran adecuados para demostrar todo cuanto fuese verdadero en base a un sistema axiomático; pero en lo referente a números naturales, no era cierto.

2. Euclides y sus cinco enunciados

Para interiorizarnos, comencemos recordando que la geometría elemental se enseña como una ciencia deductiva, no experimental, con lo cual una proposición puede ser establecida como una conclusión de una prueba lógica. Estas ideas se deben a los antiguos griegos, quienes definieron el método axiomático, a partir del cual se logra un desarrollo sistemático de la geometría. El método axiomático consiste en aceptar, sin pruebas, ciertas proposiciones como axiomas o postulados indiscutibles, desde los cuales se derivan los teoremas, valiéndose exclusivamente de los principios de la lógica. Esto causó gran impresión en los pensadores de la época, porque un número relativamente pequeño de axiomas cimentan infinitas proposiciones verdaderas.

Euclides (325-265 AC) es el matemático más prestigioso de la antigüedad. Su obra más importante es *Los Elementos*, obra que consta de trece libros sobre geometría y aritmética, cuyo contenido se ha estado enseñando (y de alguna manera aún se sigue), hasta el siglo XVIII, cuando aparecieron las geometrías no euclídeas. La obra de Euclides es importante por la sistematización, el orden y la argumentación con la que está formada. él construyó un sistema axiomático llamado *Los cinco postulados*, que se admiten como evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás. Tales postulados son:

1. Dados dos puntos, se puede trazar una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección.
3. Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

Muchos matemáticos intentaron demostrar el último postulado, sin éxito, hasta que Lobatchevsky (1792-1856), fue quien dió la solución: el postulado no puede ser demostrado, sino que es independiente. La proposición opuesta, por un punto del plano se puede trazar más de una paralela a una recta dada, fue la que dio lugar al desarrollo de otras geometrías que no contienen tampoco contradicción alguna. Lobatchevsky formuló una nueva teoría, *Los Nuevos Elementos de Geometría* (1855), partiendo del postulado opuesto al quinto, y así obtuvo otra geometría consistente.

Por ello, la forma axiomática de la geometría se presentó como un excelente modelo de conocimiento científico. Así, surgió la pregunta si era posible axiomatizar otras ramas del pensamiento. Durante los últimos dos siglos, nuevas y viejas ramas de las matemáticas, incluyendo la aritmética de los números cardinales, fueron provistas de un sistema axiomático. Esto llevó a creer que cualquier área matemática, podía ser dotada de un conjunto de axiomas susceptible de desarrollar sistemáticamente la infinita totalidad de proposiciones verdaderas generadas en el campo sujeto a investigación.

El trabajo de Gödel refutó este pensamiento, mostrando que el método axiomático posee ciertas limitaciones intrínsecas que excluyen la posibilidad de que ni siquiera la aritmética ordinaria de los números enteros pueda llegar plenamente a ser axiomatizada. Incluso demostró que es imposible establecer la consistencia lógica interna de una amplia gama de sistemas deductivos (como por ejemplo, la aritmética elemental), a menos que se adopten mecanismos tan complejos de razonamiento, que su consistencia interna queda tan sujeta a la duda como la de los propios de sistemas. Por tanto, resulta inalcanzable una completa sistematización final de muchas y muy importantes áreas de las matemáticas, y no puede darse ninguna garantía de que las ramas del pensamiento matemático queden libres de toda contradicción interna. Los descubrimientos de Gödel frenaron todos los trabajos de investigación en torno a los fundamentos de las matemáticas. Lo positivo fue que introdujo una nueva técnica de análisis, que sugería y planteaba nuevos problemas para la investigación lógica y matemática. Provocó una nueva valoración de una extendida filosofía del conocimiento general. La estructura básica de sus razonamientos y el aspecto esencial de sus conclusiones serán delineados en este trabajo.

3. La Consistencia

Durante el siglo XIX, la investigación matemática tuvo una expansión significativa, dado que se resolvieron muchos problemas que se habían resistido a los esfuerzos de los investigadores anteriores. Por ejemplo, los griegos propusieron tres problemas de geometría elemental:

1. Dividir en partes iguales un ángulo cualquiera con regla y compás.
2. Construir un cubo de doble volumen que el volumen de un cubo dado.
3. Construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.

Durante más de dos mil años se hicieron esfuerzos infructuosos por resolver estos problemas, hasta que en este siglo se demostró que sus construcciones son lógicamente imposibles. Además, se pudo determinar que las soluciones dependen de determinar la clase de raíces que satisfacen ciertas ecuaciones. Esto conllevó a la investigación profunda de los números, definiéndose con rigurosidad y construyéndose una base lógica para el sistema de los números reales, que fundó una nueva rama de las matemáticas: "*la teoría de los números transfinitos*".

Los principales trabajos se deben a George Cantor (1845-1918), quien demostró que no todos los conjuntos infinitos son del mismo tamaño y que conjuntos de los cuales diríamos que tienen más elementos, resulta que tienen la misma cantidad. Por ejemplo, hay la misma cantidad de números pares que de naturales, hay la misma cantidad de racionales que de naturales; pero hay más números reales que naturales. Estas teorías fueron controvertidas y fueron motivo de enfrentamientos con otros matemáticos.

A partir de Euclides y sus postulados, uno de los resultados importantes, que significó otro gran avance en la investigación, fue, como mencionamos, el referido a las paralelas, que se consideró lógicamente equivalente a la hipótesis de que por un punto exterior a una recta dada, puede trazarse solamente una única paralela a esa recta. Varias generaciones de matemáticos trataron de demostrar este axioma, tratando de deducirlo a partir de los otros axiomas euclideanos, sin éxito, pero sin considerar por ello que esta dificultad significara que la prueba no existiera. En el siglo XIX, gracias a los trabajos de Gauss, Bolyai, Lobatchevsky y Riemann, se demostró la imposibilidad de deducir el axioma de las paralelas desde los otros. Algunas proposiciones equivalentes son:

1. Playfair (1748-1819): por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y sólo una.
2. Proclo (410-485 aC): dos rectas paralelas están entre sí a una distancia finita.

3. Adrien Marie Legendre (1752-1833): existe un triángulo en el cual la suma de sus tres ángulos vale dos rectos.

4. Saccheri (1667-1733) y Laplace (1749-1827): existen dos triángulos no congruentes, con los ángulos de uno respectivamente iguales a los del otro.

Además de haber resuelto el problema, lo significativo fue poder determinar la "imposibilidad de demostrar" ciertas proposiciones dentro de un sistema. En este sentido, el trabajo de Gödel es una demostración de la imposibilidad de demostrar ciertas proposiciones de la aritmética.

Otro punto significativo fue que Euclides no había dicho la última palabra en geometría. Es posible construir nuevos sistemas de geometría, a partir de axiomas distintos de los adoptados por Euclides, e incluso, incompatibles con esos.

Por ejemplo, Lobatchevsky formuló una nueva teoría en su libro *Los nuevos elementos de Geometría* (1855), partiendo de la sustitución del axioma de las paralelas por la hipótesis que por un punto dado puede trazarse más de una paralela a una recta dada. Demostró que el quinto postulado no se puede probar y que la geometría que se desarrolla a partir de este nuevo postulado, es consistente, obteniéndose resultados extraordinariamente fructíferos e interesantes. A esta geometría se la llama geometría hiperbólica; aquí la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180 grados. Mientras que a la geometría de Euclides se la llama geometría parabólica, en la cual la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados. Bernard Riemann (1826-1866) partió del postulado que dice que por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela, y desarrolló la geometría elíptica (*geometría riemanniana*), en la cual la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 180 grados.

Con esto se hizo más clara la tarea de deducir teoremas a partir de postulados, más que establecer axiomas por su aparente auto evidencia. Esta revisión en la geometría condujo a la revisión de muchos sistemas axiomáticos y a brindar un fundamento axiomático a campos de investigación que se trataban en forma empírica o intuitiva. Una deducción matemática no depende de los significados especiales que puedan tomar los objetos, sino que las demostraciones matemáticas quedan asentadas en la estructura de las afirmaciones más que en el contenido de las mismas. Así, un matemático puro se enfrenta sólo al hecho de considerar si las conclusiones obtenidas son realmente "*consecuencias lógicas*" de las hipótesis iniciales.

Todo esto tuvo como consecuencias que la investigación tomara alto vuelo, dado que los nuevos sistemas se construían independientes de interpretaciones particulares. Surgieron nuevas clases de álgebras y de geometrías, y la formalización condujo a una gran variedad de sistemas de sumo interés matemático.

La creciente abstracción de las matemáticas planteó el problema de determinar si un conjunto de axiomas planteados como base de un sistema, es internamente consistente; es decir, que teoremas contradictorios no puedan deducirse del mismo sistema axiomático.

Cuando existe una interpretación de por medio, los axiomas son referidos a tales objetos pertenecientes al dominio de la interpretación, y por ende es posible asegurarse que si los axiomas son verdaderos respecto de ellos, entonces que no haya contradicciones. Pero tratar con sistemas axiomáticos sin considerar una interpretación de por medio, era un verdadero problema.

Por ejemplo, los axiomas euclideanos eran afirmaciones verdaderas respecto del espacio (euclideano) y ningún matemático se puso a pensar si era posible deducir teoremas contradictorios, puesto que dos afirmaciones lógicamente incompatibles no pueden ser simultáneamente verdaderas (éste es el principio de la geometría euclideana). Con respecto a las geometrías no euclideanas, sus axiomas fueron considerados inicialmente falsos, por lo que no era raro esperar deducir teoremas contradictorios. Por ello, se puso gran empeño en establecer la consistencia de los sistemas no euclideanos.

Como método general, se pensó en encontrar un modelo o interpretación para los postulados abstractos de un sistema, de modo tal que cada axioma se convirtiera en una afirmación verdadera respecto del modelo. En el caso de la geometría euclideana, se utilizó como modelo el espacio ordinario.

A continuación, explicaremos en qué consistía el método. Se define como "clase" a un conjunto de objetos distintos, cada uno denominado "miembro". Consideremos dos clases; K y L, y los siguientes postulados concernientes a estas dos clases, cuya naturaleza se deja indeterminada, excepto para aquello que resulta implícitamente definido en los postulados:

a) Dos miembros cualesquiera de K se hallan contenidos en un solo miembro de L.

b) Ningún miembro de K se halla contenido en más de dos miembros de L.

c) No todos los miembros de K se hallan contenidos en un único miembro de L.

d) Dos miembros cualesquiera de L contienen un solo miembro de K.

e) Ningún miembro de L contiene a más de dos miembros de K.

Podemos derivar "K tiene sólo tres miembros", por ejemplo. Pero, ¿es este sistema consistente? Podemos responder del siguiente modo: Sea K la clase de puntos que componen los vértices de un triángulo, y sea L la clase de rectas que forman sus lados. "Un miembro de K se halla contenido en un miembro de L", es que un punto vértice está situado en una recta que forma el lado. Los cinco axiomas se convierten en afirmaciones verdaderas en esta interpretación y por tanto queda demostrada la consistencia de este conjunto.

Otros sistemas, como el de la geometría riemanniana, apeló a la consistencia de la geometría euclideana, donde cada postulado riemanniano se traduce por un teorema euclideano. Por tanto, el problema se trasladó a otro terreno, concluyendo que la geometría riemanniana es consistente si lo es la geometría euclideana. Pero ¿se podía asegurar que los axiomas de Euclides eran consistentes? Y un problema más: los axiomas están dados por un conocimiento del espacio observado, y puede ocurrir que un hecho aún no observado implique una contradicción, destruyendo su pretensión de universalidad.

Hilbert, orientó su trabajo a la geometría de coordenadas cartesianas, transformando los axiomas de Euclides en verdades algebraicas. Por ejemplo, un punto en el plano es un par de coordenadas. La consistencia de los postulados eulcideanos se demuestra por la satisfacción de un modelo algebraico, siendo éste un método válido y eficaz. Por lo que si el álgebra es consistente, entonces el sistema geométrico también lo es. Tampoco aquí hallamos una prueba absoluta, sino, también, un desplazamiento del problema.

Existe siempre una dificultad presente al tratar de resolver el problema de la consistencia y es que los axiomas son interpretados siempre para modelos infinitos, por lo que resulta imposible encasillarlos en una cantidad finita de observaciones; de ahí que se desprende la gran duda acerca de la consistencia de los mismos. En la geometría euclideana, la conclusión que se trata de demostrar implica una extrapolación de una serie finita de datos a otra infinita. La mayoría de los sistemas axiomáticos constituyen la base de ramas matemáticas que no pueden ser reflejados en modelos finitos, porque de ser así bastaría con una inspección exhaustiva. Por ejemplo, "todo número entero tiene un sucesor inmediato distinto de todo número anterior"; resulta evidente que el modelo no es finito. Los modelos finitos bastan para demostrar la consistencia de ciertos conjuntos axiomáticos, pero que son de escasa importancia en matemáticas. Los sistemas axiomáticos más importantes requieren de modelos no finitos, y sólo pueden ser descriptos en términos generales, sin dar constancia que tales descripciones se hallen excentas de contradicciones, aunque "intuitivamente" lo parezcan.

Por ejemplo, Georg Cantor, matemático del siglo XIX, desarrolló la teoría de los números transfinitos, de la que se hallaron contradicciones, pese a la aperente claridad de los postulados o de la noción "clase" mencionada anteriormente.

A este respecto, Russell construyó una contradicción dentro del sistema de la lógica elemental que es precisamente análoga a la desarrollada en la teoría cantoriana. Dice: las clases parecen ser de dos tipos: las que no se contienen a sí mismas como miembros y las que sí se contienen. Una clase será llamada "normal" si y solamente si no se contiene a sí misma como miembro; en otro caso, se la llamará "no normal". Por ejemplo, la clase de los matemáticos es una clase normal; la clase misma no es un matemático y por tanto no es miembro de sí misma. Una clase no normal es la clase de todas las cosas pensables, ya que la clase de todas las cosas pensables es pensable, en consecuencia es un miembro de sí misma. Sea N la clase de todas las clases normales, ¿N es una clase normal? Si N es una clase normal, es un miembro de sí misma, porque por definición N contiene todas las clases normales. Pero a su vez, N es no normal, porque por definición una clase que se contiene a sí misma es no normal. Por otro lado, si N es no normal entonces es un miembro de sí misma, por la definición de no normal. Pero en ese caso, N es normal, porque por definición los miembros de N son las clases normales. En resumen, N es normal si y sólo si N es no normal. De aquí se desprende que la afirmación "N es normal" es verdadera y falsa a la vez.

La paradoja se produce en el conjunto formado por los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Tal conjunto si existe, sólo será miembro de sí mismo si y sólo si no es miembro de sí mismo.

También, Ernst F.F. Zermelo (1871-1953), dedicado al estudio de los cardinales transfinitos, había descubierto una paradoja similar a la de Russell, pero no la había publicado. En 1905, intentó axiomatizar la teoría de conjuntos y quiso probar que los axiomas eran consistentes pero no lo consiguió. En 1908 publicó los axiomas, a pesar del fallo de la prueba de consistencia. Tales axiomas eran: 1.- Axioma de la extensionalidad, 2.- Axioma de conjuntos elementales, 3.- Axioma de separación, 3.- Axioma de conjunto potencia, 5.- Axioma de unión, 6.- Axioma de elección y 7.- Axioma de infinito.

Esta fatal contradicción se produce como consecuencia de utilizar la noción de clase sin espíritu crítico. Posteriormente, se hallaron más paradojas de este estilo. La conclusión fue la intuición, familiaridad y claridad no eran soportes adecuados para establecer que un sistema axiomático era consistente. Por lo que, si bien el método clásico del modelo constituye una herramienta matemática valiosa, no alcanza para resolver el problema.

4. Las pruebas absolutas de la consistencia

Para tratar el problema de la consistencia, Hilbert propuso una completa formalización de un sistema deductivo, que implica dejar de lado cualquier significado asociado a las expresiones existentes dentro del sistema. La forma de manipular los símbolos debe ser por medio de la aplicación de reglas enunciadas con toda precisión, tal que los postulados o teoremas son hileras de símbolos carentes de significado. Así, la derivación de un teorema a partir de postulados se limita a una transformación de un conjunto de hileras en otro conjunto de hileras de símbolos, mediante el uso de reglas de razonamiento, debidamente formalizadas. De esta forma, cuando se ha formalizado un sistema, quedan a la vista las relaciones lógicas existentes entre las proposiciones, como así también los módulos estructurales de las diversas hileras, o cómo se vinculan, combinan o alojan unas y otras.

Realizar afirmaciones o declaraciones acerca de las hileras, conducen a suministrar información acerca del sistema formal. Tales proposiciones pertenecen a lo que Hilbert denominó *metalenguaje*; o lenguaje que se formula acerca de las matemáticas.

Las declaraciones metamatemáticas son entonces declaraciones acerca de los signos existentes dentro de un sistema matemático formalizado, acerca de las clases y disposición de los signos cuando se combinan para describir fórmulas, o acerca de las relaciones entre las fórmulas como consecuencia de las reglas de manipulación establecidas.

Por ejemplo: $2 + 3 = 5$ es una expresión aritmética; en cambio, "$2 + 3 = 5$" es una proposición o fórmula aritmética que no expresa un hecho aritmético ni pertenece al lenguaje formal de la aritmética. Pertenece a la metamatemática porque caracteriza como *fórmula* a una hilera de símbolos.

La afirmación expresada por la fórmula "$0 = 0$" puede derivarse de la fórmula "$x = x$" sustituyendo la variable x por la constante 0. Aquí se especifica una relación entre fórmulas. Pertenece a la metamatemáticas.

Decir que $x = 5$ es una ecuación es incorrecto; se debe expresar "$x = 5$" es una ecuación. Otro ejemplo: es correcto decir que Palermo es un barrio; pero es incorrecto decir que Palermo es trisílaba; es correcto decir "Palermo" es trísilaba.

Los sistemas formales que construyen los matemáticos pertenecen al grupo denominado "matemáticas"; la descripción, discusión y teorización realizadas en torno a los sistemas pertenecen al grupo denominado "metamatemáticas". Por ejemplo, la siguiente afirmación pertenece a las metamatemáticas: "La aritmética es consistente".

Distinguir entre el lenguaje y el metalenguaje, ha dado lugar a muchas paradojas y confusiones. En consecuencia, se ha exigido disponer de definiciones exactas de operaciones, de reglas lógicas de construcción y la deducción matemática.

Hilbert captó estas ideas y basó su intento de construir pruebas absolutas de consistencia en la distinción entre un cálculo formal y su descripción. Trató de desarrollar un método que produjera demostraciones de consistencia tan ajena a las dudas lógicas como al uso de modelos finitos para demostrar la consistencia en sí. Es el método basado en la presentación de un alfabeto, reglas de construcción de fórmulas, un conjunto de axiomas o postulados verdaderos y un conjunto de reglas de derivación de nuevas fórmulas o teoremas.

Él creía posible presentar cualquier cálculo matemático en este esquema. Esperaba demostrar, examinando exhaustivamente las propiedades estructurales de las expresiones encerradas en un sistema, que no pudieran obtenerse fórmulas formalmente contradictorias a partir de los axiomas dados. Su método implicaba que los procedimientos no debían hacer referencia ni a un número infinito de propiedades eestructurales de las fórmulas ni a un número infinito de operaciones con fórmulas. Tales procedimientos se denominaron “finitistas”. Una prueba de consistencia adecuada a estos requisitos recibió el nombre de “absoluta”.

Una prueba absoluta que logra sus objetivos utilizando un mínimo de principios de deducción no presupone la consistencia de ningún otro conjunto de axiomas. Hilbert no dio una explicación precisa de qué procedimientos metamatemáticos deben considerarse finitistas. En conclusión, el propósito de Hilbert, fue demostrar con esos métodos finitistas, la imposibilidad de derivar ciertas fórmulas contradictorias en un cálculo matemático dado.

5. Los Principia y la consistencia

En esta sección queremos abordar el cómo y porqué surgieron los *Principia* y explicar cómo puede demostrarse la absoluta consistencia de un sistema deductivo formalizado.

Las demostraciones matemáticas incluyen reglas de deducción no formuladas explícitamente. Por ejemplo, en una demostración por absurdo, para forjar una cadena de eslabones se usan reglas de deducción elementales y, o, complejas, en forma tácita. Tal es el caso cuando una proposición contiene la palabra “todos” o “algunos”, o cuando se usan proposiciones que se corresponden con la forma “p o no p” (x es *primo* o x es *compuesto*), más la regla de la sustitución para hacer una valoración particular. Los matemáticos han estado razonando durante dos mil años sin considerar los principios subyacentes ni la naturaleza de sus herramientas.

Fue Emmanuel Kant (1724-1804) quien en 1787 expresó que la lógica de Aristoteles no había tenido avances significativos, e incluso que era incompleta y que deja sin explicación el uso de varios razonamientos deductivos.

George Boole (1815-1864) publicó el trabajo *The Mathematical Analysis of Logic*, en el cual desarrollaba un álgebra de la lógica, con el fin de suministrar una notación precisa para el manejo de tipos de deducción más generales y variados que los tradicionales.

Con los *Principia Mathematica* (1847) de Whitehead y Russell, se consiguió aritmetizar el álgebra y el “cálculo infinitesimal”, demostrando que las diversas nociones empleadas en el análisis matemático son definibles en términos exclusivamente aritméticos. Russell trataba de demostrar que todas las nociones aritméticas pueden ser definidas en ideas estrictamente lógicas y que todos los axiomas de la aritmética pueden ser deducidos de un pequeño número de proposiciones básicas certificables como verdades estrictamente lógicas. *Principia Mathematica* pareció solucionar el problema de la consistencia de los sistemas matemáticos, en particular el de la aritmética, mediante la reducción del problema de consistencia al de la lógica formal. Si los axiomas de la aritmética son sencillamente transcripciones de teoremas de la lógica, entonces determinar si dichos axiomas son consistentes, equivale a ver si son consistentes los axiomas fundamentales de la lógica.

Pero el hallazgo de contradicciones en la teoría cantoriana de números transfinitos dentro de la lógica misma, mostraron que la reducción de la aritmética a la lógica no proporciona una respuesta final al problema de la consistencia. *Principia* suministró un sistema de notación para codificar todas las proposiciones de la matemática pura, en particular la aritmética, y reveló la mayoría de las reglas de deducción formal utilizadas en las matemáticas.

La formalización se lleva en cuatro fases:

1. Definición del Vocabulario.
2. Definición de Reglas de formación para la generación de fórmulas.
3. Definición de Reglas de transformación o deducción.
4. Selección de fórmulas como axiomas.

Se define "*teorema del sistema*" a cualquier fórmula que pueda ser derivada de los axiomas aplicando sucesivamente las reglas de transformación. Una "*demostración*" formal es una secuencia de fórmulas, donde cada una es o un axioma, o se obtiene por la aplicación de reglas de deducción a partir de otras anteriores en la secuencia.

Podemos pensar en el Cálculo Proposicional. La clase de teoremas es infinita, y hay algunos que están lejos de ser evidentes o triviales. El propósito es demostrar que el conjunto de axiomas no es contradictorio; es decir, poder demostrar absolutamente que con las reglas de deducción es imposible derivar contradicciones. Para ello basta con demostrar que existe por lo menos una fórmula que no es derivable a partir de los axiomas, porque si el cálculo es inconsistente resulta que toda fórmula o su negación puede ser demostrada. Lo que se hace es buscar una propiedad, por ejemplo "ser tautología", que sea heredada en cada teorema. Es decir, cada teorema es tautología. La propiedad es común a todos los axiomas, se puede heredar y no toda fórmula tiene tal propiedad. Si descubrimos una fórmula que no es teorema, hemos demostrado su consistencia, porque de no ser consistente, toda fórmula podría ser demostrada. Por ejemplo "p o q" no tiene la propiedad de ser tautología. Hemos mostrado una prueba absoluta de la consistencia del sistema.

Por otro lado, es válido preguntarse si los axiomas son suficientes para obtener todas las fórmulas que son tautologías (que poseen la propiedad elegida). De ser así, se dice que el sistema axiomático es completo. En el Cálculo Proposicional, *esto es así*.

Frecuentemente determinar si un sistema axiomatizado es completo resulta de gran interés, dado que por ejemplo, diversas ramas de las matemáticas se han querido axiomatizar estableciendo un conjunto de presunciones a partir de las cuales puedan deducirse todas las declaraciones verdaderas de algún campo de investigación.

Cuando Euclides axiomatizó la geometría elemental, seleccionó aparentemente sus axiomas de modo que fuese posible derivar de todos ellos verdades geométricas; es decir, las que ya habían sido establecidas o cualesquiera otras que pudiesen descubrirse en el futuro. Así, Euclides demostró tener una gran intuición al colocar su axioma de las paralelas como una hipótesis lógicamente independiente de sus demás axiomas, porque posteriormente se probó que sin este axioma, el sistema de axiomas era incompleto.

Hasta tiempos muy recientes se admitía como algo incontrovertiblemente cierto la posibilidad de reunir un conjunto completo de axiomas para cualquier rama de las matemáticas. Los matemáticos creían en particular que el conjunto propuesto en el pasado para la aritmética era realmente completo o que podía, en su defecto, completarse mediante el agregado de nuevos axiomas en una cantidad finita al conjunto original. El descubrimiento de que esto no surtiría efecto es uno de los más importantes logros de Gödel.

6. La idea de representación y su empleo en Matemáticas

El Cálculo Proposicional es un ejemplo de un sistema matemático en el que se alcanzaron plenamente los objetivos de la teoría de demostración de Hilbert. Pero sirve para codificar parte de la lógica formal y no alcanza para desarrollar ni siquiera la aritmética elemental. El programa de Hilbert no es tan limitado; una prueba absoluta de consistencia se logró para un sistema aritmético que permite la adición de números cardinales.

El método finitista de Hilbert no es suficientemente potente para demostrar la consistencia de un sistema como *Principia*. Por ello hubo repetidos intentos infructuosos para construir demostraciones de consistencia, hasta que Gödel, en 1931, demostró que todos los intentos que se realizaran dentro de los límites del programa de Hilbert, no podían por menos que fracasar.

¿Qué es lo que estableció Gödel y cómo demostró sus resultados? Sus principales conclusiones son dos:

1. Demostró que es imposible presentar una prueba matemática de la consistencia de un sistema lo bastante comprensivo como para contener toda la aritmética, a menos que se empleen reglas de deducción que difieren en ciertos aspectos esenciales de las reglas de transformación utilizadas para derivar teoremas dentro del sistema.

2. Esta conclusión es incluso más sorprendente y revolucionaria porque demuestra la existencia de una fundamental limitación en la potencia del método axiomático. Ya sea los *Principia* o cualquier otro sistema dentro del cual pueda desarrollarse la aritmética, es esencialmente incompleto. Es decir, dado cualquier conjunto de axiomas aritméticos, *existen proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden ser derivadas de dicho conjunto*.

Por ejemplo: el teorema de Goldbach (1690-1764) “todo número par es la suma de dos números primos”. Nadie ha podido encontrar una prueba de que la conjetura de Goldbach es universalmente verdadera; es decir que se aplique sin excepción a todos los números pares. Tenemos una proposición aritmética que puede ser verdadera pero que no puede ser derivada del sistema axiomático.

¿ Podríamos aumentar el sistema axiomático con más axiomas o modificarlo? Los resultados obtenidos por Gödel demuestran que aunque la hipótesis fuese correcta, aun quedarían verdades aritméticas que no son formalmente derivables del conjunto ampliado.

7. La paradoja de Richard

Gödel basó la estructura de su argumentación sobre el razonamiento de implicado en una de las contradicciones lógicas conocida coma la paradoja “richardiana”, propuesta por el matemático francés

Jules Richard (1862-1956), en 1905. Explicaremos a continuación en qué consiste esta paradoja.

Consideremos un lenguaje (p.e. Español) en el que podamos formular y definir propiedades puramente aritméticas de los números cardinales. No pueden definirse explícitamente algunos términos que hacen referencia a propiedades aritméticas (ya que no podemos definirlo todo y empezar en alguna parte) aunque presumiblemente pueden ser comprendidos de alguna otra manera. Por ejemplo:

1. La propiedad de "ser un número primo como no divisible por ningún otro número más que por sí mismo y la unidad".
2. La propiedad de "ser un número cuadrado perfecto como ser el producto de algún número entero por sí mismo".

Podemos ver que cada una de tales definiciones contendrá solamente un número finito de palabras y por consiguiente un número finito de letras del alfabeto.

Podemos entonces ordenar estas definiciones en una serie, tal que una oración precede a otra si la cantidad de letras de la primera es menor que la de la segunda; en caso de igualdad, una de ellas precederá a la otra atendiendo al orden alfabético de las letras contenidas en cada una. Sobre la base de este orden, a cada definición le corresponderá un único número entero, que representará el lugar que ocupa la definición en la serie.

Dado que cada definición está asociada a un único entero, puede ocurrir que en algunos casos un número entero posea la misma propiedad que la expresada por la definición a la cual está asociado. Por ejemplo, si "no divisible por ningún número entero más que por sí mismo y por la unidad" se halla en correlación con el número 17, justamente 17 tiene la propiedad designada por esa expresión. Por otra parte, si la expresión que define "ser el producto de algún número entero por sí mismo" se halla en correlación con el número de orden 15, está claro que 15 no posee la propiedad designada por la expresión.

Describiremos la situación del segundo ejemplo diciendo que 15 tiene la propiedad de ser richardiano; mientras que el 17 no tiene la propiedad de ser richardiano. En términos generales, definimos "x es richardiano" o "x no tiene la propiedad designada por la expresión declarante con la que se halla relacionado en la serie ordenada de definiciones".

Llegamos así a la paradoja richardiana. La expresión que define la propiedad "ser richardiano" describe notoriamente una propiedad numérica de los enteros. Por lo que la expresión misma pertenece a la serie de definiciones ya enunciadas antes. De aquí se desprende que la expresión está relacionada con un número entero determinante de su posición; supongamos que ese número es n.

Nos planteamos ¿es n richardiano? Es fatal la contradicción que se avecina! Porque n es richardiano, si y sólo si n carece de la propiedad designada por la expresión declarante con la que está relacionado; es decir, si carece de la propiedad de ser richardiano. En resumen, n es richardiano si y sólo si n no es richardiano!, de modo que la declaración "n es richardiano" es verdadera y falsa a la vez.

La contradicción es una consecuencia derivada de no jugar del todo limpio. Se ha deslizado una sutil, esencial y tácita hipótesis subyacente bajo la ordenación sucesiva de las definiciones. Se había acordado considerar las definiciones de las propiedades estrictamente aritméticas de los números enteros, que pueden formularse con la ayuda de nociones tales como adición aritmética, multiplicación, etc. pero de pronto, hemos incorporado una definición que se refiere a la notación usada para formular las propiedades aritméticas, no inicialmente proyectada, porque esta definición involucra nociones matemáticas tales como el número de símbolos que se dan en las expresiones.

Podemos distinguir entre las proposiciones que se dan dentro de la aritmética (que no hacen referencia al sistema de notación) y las proposiciones acerca de algún sistema de notación en el que se codifica la aritmética.

La construcción vista en la paradoja de Richard, sugiere la idea de que cabe la posibilidad de representar o reflejar declaraciones matemáticas acerca de un sistema formal, suficientemente amplio, dentro del mismo sistema.

La característica fundamental de la representación es que puede demostrarse que una estructura abstracta de relaciones existentes en un universo de objetos, existe también entre objetos pertenecientes a otro universo diferente. Esta característica impulsó a Gödel a construir demostraciones. Si las proposiciones metamatem áticas acerca de un cálculo aritmético formalizado pudiesen efectivamente ser representadas por fórmulas aritméticas dentro del cálculo, grandes hubieran sido los avances en las demostraciones metamatemáticas. Entonces, ideó un sistema de representación tal que ni la fórmula aritmética correspondiente a una determinada proposición metamatemática verdadera acerca de la fórmula, ni la fórmula aritmética correspondiente a la negación de la proposición son demostrables dentro del cálculo. Es decir, no son derivables de los axiomas, siendo estos por lo tanto incompletos.

El método de representación de Gödel le permitió construir una fórmula aritmética correspondiente a la proposición metamatemática "*El cálculo es consistente*" y demostrar que esta fórmula no es demostrable dentro del cálculo. De ahí, que se desprende que la proposición metamatemática no puede ser demostrada a no ser que se utilicen reglas de deducción que no pueden ser representadas dentro del cálculo, de tal modo que al demostrar la proposición se requieran de reglas cuya consistencia pueda ser tan discutible como la consistencia misma de la aritmética.

8. Conclusiones

El trabajo de Gödel indica que ninguna prueba absoluta y finitista de consistencia para la aritmética, puede ser representada dentro de la aritmética misma.

Un tratamiento axiomático de la teoría de números no puede agotar el campo de verdades aritméticas, dado que existe un número infinito de proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden ser deducidas formalmente de ningún conjunto de axiomas mediante un conjunto cerrado de reglas de deducción.

Lo que se entiende por proceso de demostración matemática no se corresponde con un proceso o método axiomático basado en axiomas y reglas de deducción o transformación. Esto es así porque no hay límite en la creación de nuevas reglas de demostración.

Por más ingeniosas y complejas que puedan ser las máquinas, la incompletitud marca la existencia de muchos problemas de la teoría de números que están fuera de los alcances de cualquier sistema axiomático y de cualquier máquina. *Es posible construir una máquina que resuelva un problema determinado pero no una que los resuelva todos*.

En este sentido, el ser humano tiene la capacidad de incorporar reglas de operaciones más poderosas que las de las máquinas en sí.

El teorema de Gödel nos indica que los recursos del intelecto humano no han sido, ni aparentemente pueden serlo, plenamente formalizados y que aún hay posibilidades de hallar nuevos métodos de demostración. Con ello queremos significar que la estructura y potencia de la mente humana es mucho más compleja y sutil, invitándonos a una apreciación mayor de nuestra razón creadora.

9. Referencias Bibliográficas

- *El teorema de Gödel* (Godel Proof), Ernest Nagel y James Newman Editorial Tecnos, 1979.
- *La clase de Honores: Los problemas de Hilbert y quiénes los resolvieron*, Benjamin H. Yandell, A K peters Ltd, 2002, ISBN:1-56881-141-1.
- *Lógica para Matemáticos*, A.G. Hamilton,Paraninfo, 1981.
- *Introduction to Mathematical Logic*, E. Mendelson, D. V. Nostrand Company, Inc. 1964.
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk
- http://www. reforma.com/ciencia/articulo
- http://www.canalsocial.com/biografia/matematicas/
- http://www.cibernous.com/autores/kgodel/teoria/biografia.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/biografias/Godel.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/biografias/Russell.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/biografias/Cantor.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/biografias/Gauss.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/biografias/Euclides.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/biografias/Zermelo.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/biografias/Legendre.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Geometria/Elemental/Quinpos.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Problemas/PMilenio.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Problemas/psinres.htm
- http://www.terra.es/personal/jftjft/Problemas/Profamos.htm
- http://www.mat.puc.cl/?rrebolle/Cvirtual/
- http://euler.ciens.ucv.ve/matemáticos