Cálculo de Predicados

1. Introducción

Como se dijo anteriormente, a través de la lógica se intenta determinar si un razonamiento o argumentación es válida a través del análisis de las fórmulas que se obtienen al representar las expresiones o frases del lenguaje coloquial, en un lenguaje más formal, como lo es la lógica proposicional. Las argumentaciones se descomponen en las proposiciones que la conforman y analizando su estructura se puede establecer la validez, o no de las mismas. Sin embargo, a pesar de que el cálculo proposicional permite formalizar y analizar una gran cantidad de enunciados, en muchas oportunidades el uso de este lenguaje es claramente insuficiente para el análisis de determinadas argumentaciones.

Consideremos un argumento simple como ≪*todos los cuadrados son positivos, 9 es un cuadrado, por lo tanto 9 es positivo*≫, aunque obviamente se puede aceptar intuitivamente como verdadero, desde el punto de vista proposicional, o más formalmente, no se puede asegurar esto. Si se formaliza el argumento utilizando el lenguaje definido para el cálculo proposicional, la oración anterior tiene la siguiente forma:

$$((p \wedge q) \to r)$$

con p = *todos los cuadrados son positivos*, q = *9 es un cuadrado*, r = *9 es positivo*. Si lo analizamos con lo estudiado en el cálculo proposicional, sabemos que para determinar si un argumento es válido basta con demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas; por lo tanto no hay ninguna razón por la cual esta argumentación pueda ser verdadera, ya que no se puede afirmar que r pertenece a las consecuencias de $\{p, q\}$, formalmente:

$$\{p, q\} \not\models r$$

En este caso la validez del argumento no depende de la relación entre las premisas y la conclusión, sino de la relación que existe entre *partes* de las proposiciones que intervienen y entre las formas de éstas.

Otro ejemplo de argumentaciones que no pueden formalizarse correctamente con el lenguaje proposicional, son los del tipo ≪*Juan es padre de Luis*≫ y ≪*Luis es hijo de Juan*≫, en lógica de proposiciones éstos sólo pueden representarse como variables proposicionales, p = *Juan es padre de Luis* y q = *Luis es hijo de Juan* y no es posible representar un conocimiento tan simple como que ≪si *x es padre de y* entonces *y es hijo de x*≫ ; es decir que no hay forma de conceptualizar que el *Juan* que aparece en la proposición p es el mismo que aparece en la proposición q, y lo mismo pasaría con *Luis*.

Podemos observar que en el universo del discurso del cálculo proposicional no hay objetos, sino afirmaciones que se formulan sobre objetos. Esto hace que el poder expresivo, y por tanto la utilidad de esta lógica resulten pobres. Es claro que se hace necesario extender el lenguaje, de tal manera que se puedan analizar este tipo de proposiciones y argumentaciones, en las que normalmente hay premisas que expresan conocimiento sobre objetos; definir un lenguaje que permita *entrar* en el contenido de las proposiciones, analizando objetos y relaciones. Además es deseable introducir medios para hablar sobre *todos* los objetos del dominio del discurso, por ejemplo permitir declaraciones de la forma ≪*todos los números pares son una suma de dos primos impares*≫, o expresiones como ≪*existe un número real cuyo cuadrado es 2*≫.

Este nuevo lenguaje lo definiremos en el marco del *lógica de predicados* o *cálculo de predicados* (también conocida como *lógica de primer orden*). Según el diccionario de la *RAE*, un **predicado** es "*lo que se afirma de un sujeto en una proposición*" y justamente esto es lo que permite el cálculo de predicados. En la misma se puede separar cada proposición en lo que en gramática serían el sujeto y el predicado, para así representar conceptualizaciones que contienen relaciones entre objetos, como las relaciones ≪padre≫ e ≪hijo≫; describir propiedades de los objetos de un universo dado; al igual que analizar razonamientos en los cuales su validez no depende de las conexiones externas entre los enunciados (su estructura), sino que es preciso penetrar en la estructura interna del enunciado para determinar la misma.

Sin embargo, a veces también surge la necesidad de hablar de propiedades de relaciones, es decir relaciones entre relaciones. La lógica de predicados o de primer orden se limita a representar relaciones entre objetos; la lógica que permite expresar relaciones entre relaciones se conoce como *lógica de segundo orden*; y así sucesivamente van surgiendo diferentes lógicas que nos permiten enriquecer nuestro vocabulario y lograr un mayor poder expresivo. Nosotros nos centraremos en la lógica de predicados o de primer orden, que desde el punto de vista computacional, es la base de los procesos de representación y de razonamiento.

2. Sintaxis del Cálculo de Predicado

Al igual que se hizo para el Cálculo Proposicional, describimos primeramente el lenguaje simbólico que se utilizará para estudiar los mecanismos de razonamiento de el cálculo de predicados. Como primer paso para la definición de este nuevo lenguaje, vamos a definir su alfabeto y luego seguiremos con su gramática, es decir, las reglas que permiten escribir las "palabras" válidas de este lenguaje.

2.1. Alfabeto

El alfabeto básico de todo lenguaje de primer orden consta de dos tipos de símbolos: los que se denominan *símbolos lógicos* y los denominados *símbolos no lógicos*. Los símbolos lógicos son los siguientes:

- *Variables:* $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Como en el caso proposicional, x_n es una abreviatura del símbolo x seguido de n barras $|$.
- *Conectivos proposicionales:* $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$.
- *Cuantificadores:* $\forall$ (cuantificador universal) y $\exists$ (cuantificador existencial).
- *Símbolos auxiliares:* $($, $)$.

Por otro lado, los símbolos no lógicos, el alfabeto específico de cada lenguaje de primer orden, contiene:

- Una familia $\mathcal{F}$, de *símbolos de funciones* $(f_i)_{i\in I}$ tal que para cada f_i se tiene definida su aridad $n(i) \in \mathbb{N}$. Puede ser $I = \emptyset$, es decir que $\mathcal{F} = \emptyset$.

- Una familia $\mathcal{P}$ de *símbolos de predicados* $(P_j)_{j\in J}$ tal que para cada P_j se tiene definida su aridad $m(j) \in \mathbb{N}$. Se exige que $J \neq \emptyset$, es decir que $\mathcal{P} \neq \emptyset$, esto es, que *haya al menos un símbolo de predicado*.

- Una familia $\mathcal{C}$ de *símbolos de constantes* $(c_k)_{k\in K}$. Puede ser que $K = \emptyset$, o sea que $\mathcal{C} = \emptyset$.

Los símbolos de funciones, de predicados y de constantes forman el *vocabulario* de un lenguaje de primer orden. Como se ve, los conjuntos I y K que indican la cantidad de símbolos de función o de símbolos de constantes respectivamente, pueden ser vacíos; en cambio el conjunto J, que indica la cantidad de predicados del vocabulario, nunca puede serlo.

Los símbolos lógicos son comunes a *todos* los lenguajes de primer orden, mientras que el vocabulario es particular de cada lenguaje, por lo tanto es claro que un lenguaje de primer orden queda determinado por su vocabulario, que simbolizaremos con

$$\sigma = \langle\ (f_i)_{i\in I}, (P_j)_{j\in J}, (c_k)_{k\in K}\ \rangle$$

Por convención suele usarse un superíndice que explicite la aridad de cada símbolo de función y/o de relación. En algunos casos, por simplicidad, nombraremos con $\mathcal{F}$ al conjunto de símbolos de funciones, con $\mathcal{P}$ al conjunto de símbolos de predicados y con $\mathcal{C}$ al conjunto de símbolos de constantes; en ese caso el vocabulario puede encontrarse como: $\sigma = \langle\ \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{C}\ \rangle$

Los símbolos de *constantes* representan objetos concretos; las constantes son individuos o elementos distinguidos del universo del discurso (objetos sobre los cuales queremos razonar). Por lo general se denotan con las primeras letras del alfabeto ($a, b, c, \ldots$). Las *variables* sirven para representar objetos genéricos del universo, o cuyo dominio hay que especificar y generalmente se denotan con las últimas letras del alfabeto (...,w, x, y, z). Las funciones monádicas, (de aridad $n = 1$) representan un objeto del universo, expresado en función de otro objeto del mismo universo. Las funciones poliádicas, (de aridad $n > 1$) representan un objeto del universo en función de otros objetos; se utilizan letras intermedias del alfabeto para denotarlas ($f, g, h, \ldots$). El concepto de "predicado" es similar al concepto de "relación", sólo que un concepto es filosófico y el otro es matemático. Los predicados pueden ser unarios, binarios, ternarios, etc. ; dependiendo de la cantidad de objetos que relacionen, o sobre los que hable. Los predicados unarios, por ejemplo, representan propiedades de un objeto, como por ejemplo ≪el 7 es un número primo≫. Los predicados poliádicos (de aridad $n > 1$), representan relaciones entre objetos. Un ejemplo de predicado binario, (que define una relación de grado dos), es aquel que relaciona dos elementos del universo sobre el que se trabaja, por ejemplo ≪el 9 es múltiplo de 3≫; generalmente los predicados son denotadas con letras mayúsculas (P, Q, R,..).

2.2. Términos y fórmulas

Recordando una vez más que el *alfabeto de un lenguaje de primer orden está formado por los símbolos lógicos y el vocabulario*, σ; veremos cómo escribir "palabras" en este lenguaje al que llamaremos L_σ, es decir, cuáles son las reglas de su gramática. A grandes rasgos, el lenguaje define dos categorías de entidades sintácticas: una para representar a los objetos del universo sobre el que se quiere expresar algo, los *términos*; y otra para representar las propiedades y relaciones entre los mismos, las *fórmulas bien formadas*.

Sea A el alfabeto de un lenguaje de primer orden L_σ, se define:

Definición 1 *Una lista de símbolos del alfabeto A es un* ***término*** *si y sólo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las siguientes reglas:*

(T1) Los símbolos de variables son términos.

(T2) Los símbolos de constantes son términos.

(T3) Si $t_1, \ldots, t_n$ son n términos y f es un símbolo de función n-aria, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.

(T4) Nada más es un término.

Como en la definición de fórmulas proposicionales, para precisar el significado de "aplicar un número finito de veces las reglas (T1), (T2), (T3) y (T4)" se introduce la siguiente definición:

Definición 2 *Una* ***cadena de formación del término*** *t_n es una sucesión finita $t_1, \ldots, t_n$ de elementos de A^* que satisface las siguientes condiciones:*

(CFT) Para cada i tal que $1 \leq i \leq n$, se tiene que

- *o bien t_i es un símbolo de variable.*
- *o bien t_i es un símbolo de constante.*
- *o bien existen un símbolo de función k-aria f y k índices $i_1, \ldots, i_k$, todos estrictamente menores que i, tales que t_i es $f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k})$.*

El subíndice $n \geq 1$ del último término, será llamado *longitud* de la cadena de formación.

Considerando esto, la Definición 1 puede expresarse de la siguiente forma:

Definición 3 *Una lista* ***t*** *de símbolos del alfabeto A es un término si y sólo si existe una cadena de formación de términos $t_1, \ldots, t_n$ tal que $t = t_n$.*

Ejemplo 1:

Si se tiene un vocabulario $\sigma = \langle \{f_1^{(1)}, f_2^{(2)}\}, \{P_1^{(2)}\}, \{c_1, c_2, c_3\} \rangle$, donde f_1 es de aridad 1, f_2 es de aridad 2 y P_1 es de aridad 2. Los siguientes son ejemplos de términos en el correspondiente lenguaje de primer orden L_σ:

a) c_2	b) x_1	c) $f_2(x_2, c_3)$
d) $f_1(x_1)$	e) c_3	f) $f_1(f_1(c_1))$
g) $f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3))$	h) $f_1(f_2(x_1, x_1))$	i) $f_1(f_2(f_1(x_1), x_1))$

$\square$

Llamaremos *grado de complejidad de un término* t, con $t \in L_\sigma$, y lo denotaremos por $comp(t)$, al número de símbolos de función que figuran en la expresión t, contados tantas veces como aparezcan.

Observemos que:

$$comp(t) = 0 \text{ si y sólo si } t \text{ es una variable o una constante}$$

y que si $t = f(t_1, \ldots, t_k)$, donde f es un símbolo de función k-aria y los t_i son términos, entonces

$$comp(t) \overset{def}{=} comp(t_1) + \ldots + comp(t_k) + 1.$$

Ejemplo 2:

Si consideramos el mismo vocabulario σ y los mismos términos del Ejemplo 1, podemos calcular la complejidad de cada uno de los términos presentados allí:

a) $comp(c_2) = 0$

b) $comp(x_1) = 0$

c) $comp(f_2(x_2, c_3)) = 1$

d) $comp(f_1(x_1)) = 1$

e) $comp(c_3) = 0$

f) $comp(f_1(f_1(c_1))) = 2$

g) $comp(f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3))) = 4$

h) $comp(f_1(f_2(x_1, x_1))) = 2$

i) $comp(f_1(f_2(f_1(x_1), x_1))) = 3$

$\square$

Como se dijo, los términos nos permiten hacer referencia a objetos del universo del que estamos hablando. Ahora, con los términos y los símbolos de predicados podemos construir los elementos básicos de nuestro lenguaje, que llamaremos *fórmulas atómicas*:

Definición 4 *Una **fórmula atómica** de un lenguaje de primer orden con vocabulario σ, L_σ, es una lista de símbolos de la forma $P(t_1, \ldots, t_k)$, donde P es un símbolo de predicado k-ario y $t_1, \ldots, t_k$ son términos.*

Ejemplo 3:

Considerando como vocabulario σ al definido en el Ejemplo 1, los siguientes son ejemplos de fórmulas atómicas del correspondiente lenguaje L_σ:

a) $P_1(c_2, x_1)$

b) $P_1(f_2(x_2, c_3), c_3)$

c) $P_1(f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3)), f_1(c_1))$

d) $P_1(f_1(f_2(x_1, x_1), f_1(f_2(x_1, x_1))$

e) $P_1(f_1(f_2(f_1(x_1), x_1)), f_1(f_2(x_1, c_1)))$

f) $P_1(f_1(c_2), f_2(f_1(c_2), f_1(c_2)))$

□

Las fórmulas atómicas son las fórmulas más simples de nuestro lenguaje, a partir de ellas se podrán construir otras más complejas (compuestas o moleculares).

Entonces, estamos en condiciones de definir las fórmulas bien formadas, que nos permitirán expresar los enunciados de primer orden, que son parte del objetivo fundamental de nuestro estudio.

Definición 5 *Una lista de símbolos del alfabeto de un lenguaje de primer orden con vocabulario σ es una* ***fórmula o fórmula bien formada (fbf)*** *si y sólo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las siguientes reglas:*

(F1) Las fórmulas atómicas son fórmulas.

(F2) Si φ es una fórmula, también lo es $\neg\varphi$.

(F3) Si φ y ψ son fórmulas, también lo son las expresiones $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ y $(\varphi \rightarrow \psi)$.

(F4) Si φ es una fórmula y x denota una variable, entonces $(\forall x\ \varphi)$ y $(\exists x\ \varphi)$ son fórmulas.

(F5) Nada más es una fórmula.

Dejamos al cuidado del lector precisar la definición anterior, definiendo por analogía con los casos de fórmulas proposicionales y de términos, la noción de *cadena de formación de fórmulas*.

Ejemplo 4:

Considerando el vocabulario $\sigma = \langle\ \{f_1^{(1)}, f_2^{(2)}\}, \{P_1^{(2)}\}, \{c_1, c_2, c_3\}\ \rangle$, los siguientes son ejemplos de fórmulas bien formadas pertenecientes a L_σ:

a) $P_1(c_2, x_1)$

b) $(P_1(f_2(x_2, c_3), c_3) \wedge P_1(x_1, x_3))$

c) $(\exists x_1 P_1(f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3)), f_1(c_1)))$

d) $\neg(P_1(f_1(f_2(x_1, x_1)), f_1(f_2(x_1, x_1))) \vee (\exists x_3 P_1(x_9, x_3)))$

e) $(\forall x_1(P_1(f_1(f_2(f_1(x_1), x_1)), f_1(f_2(x_1, c_1))) \wedge P_1(c_2, x_1)))$

f) $(\forall x_2(P_1(f_1(c_2), f_2(f_1(c_2), f_1(c_2))) \rightarrow (\exists x_1 P_1(x_2, x_1)))$

□

Sea $\varphi \in L_\sigma$, llamaremos *grado de complejidad de una fórmula* φ, y lo denotaremos como $comp(\varphi)$, al número de conectivos y cuantificadores que figuran en φ, contados tantas veces como aparezcan.

Observemos que:

$$
\begin{aligned}
comp(\varphi) &\stackrel{def}{=} 0 \text{ si y sólo si } \varphi \text{ es una fórmula atómica}\\
comp(\neg\varphi) &\stackrel{def}{=} comp(\varphi) + 1\\
comp(\varphi \vee \psi) = comp(\varphi \wedge \psi) = comp(\varphi \rightarrow \psi) &\stackrel{def}{=} comp(\varphi) + comp(\psi) + 1\\
comp(\forall x\ \varphi) = comp(\exists x\ \varphi) &\stackrel{def}{=} comp(\varphi) + 1
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5:

Podemos calcular la complejidad de cada una de las siguientes fórmulas del lenguaje L_σ definido en el Ejemplo 4:

a) $comp(P_1(c_2, x_1)) = 0$

b) $comp(P_1(f_2(x_2, c_3), c_3)) = 0$

c) $comp(\exists x_1 P_1(f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3)), f_1(c_1))) = 1$

d) $comp(\neg(P_1(f_1(f_2(x_1, x_1)), f_1(f_2(x_1, x_1))) \vee (\exists x_3 P_1(x_9, x_3))) = 3$

e) $comp(\forall x_1(P_1(f_1(f_2(f_1(x_1), x_1)), f_1(f_2(x_1, c_1))) \wedge P_1(c_2, x_1))) = 2$

f) $comp(P_1(f_1(c_2), f_2(f_1(c_2), f_1(c_2))) \rightarrow P_1(x_2, x_1)) = 1$

□

Para poder definir los enunciados de un lenguaje de primer orden, necesitamos introducir los conceptos de apariciones libres y ligadas de una variable en una fórmula. Intuitivamente, una variable x *aparece ligada* en una fórmula φ si está afectada por un cuantificador $\forall$ o $\exists$, es decir está dentro de su ámbito, o es la variable x que aparece acompañando a un cuantificador ($\forall x$, $\exists x$). En caso contrario, se dice que esa variable *aparece libre* en φ.

Por ejemplo, si P y Q son símbolos de predicado binario y φ es una fórmula, con $\varphi = (\forall x\; Q(y, y))$, en ella las dos apariciones de y son libres, y la de x es ligada. En cambio, si se analiza la fórmula $\psi = ((\forall x\; P(x, y)) \rightarrow (\exists y\; Q(x, y)))$, tanto la primera como la segunda aparición de x en ψ es ligada $((\forall x\; P(x, y)))$, ya que la primera acompaña al cuantificador y la segunda está dentro de su ámbito, mientras que la tercera es libre ($Q(x, y)$). La aparición de y, en cambio, es libre en el predicado P, y ligada en su segunda y tercera aparición $((\exists y\; Q(x, y)))$. La definición precisa de apariciones libres y ligadas de una variable en una fórmula se hace por inducción sobre la complejidad de la misma del modo siguiente:

Definición 6 *Si* $comp(\varphi) = 0$ *entonces* φ *es una fórmula atómica,* $\varphi = P(t_1, \ldots, t_k)$*, entonces las apariciones de todas las variables presentes en* φ *son libres. Sea ahora* φ *una fórmula tal que* $comp(\varphi) > 0$ *y supongamos que hemos definido las apariciones libres de variables en toda fórmula* ψ *y* η *tal que* $comp(\psi) < comp(\varphi)$ *y* $comp(\eta) < comp(\varphi)$ *Entonces definiremos las apariciones libres de variables en* φ *de acuerdo a los casos posibles, a saber:*

1. *Si* φ *es* $\neg\,\psi$*. Las apariciones libres de una variable en* φ *son las apariciones libres de esta variable en* ψ*.*

2. *Si* φ *es* $(\psi \vee \eta)$*, o es* $(\psi \wedge \eta)$ *o es* $(\psi \rightarrow \eta)$*. Las apariciones libres de una variable en* φ *son las apariciones libres de esta variable en* ψ *y en* η*.*

3. *Si* φ *es* $(\forall x\; \psi)$ *o* $(\exists x\; \psi)$*. Todas las apariciones de* x *en* φ *son ligadas. Para toda variable* y *distinta de* x*, las apariciones libres de* y *en* φ *son las apariciones libres de* y *en* ψ*.*

Ejemplo 6:

Considerando las fórmulas del Ejemplo 5, podemos decir que:

a) x_1 aparece libre en $P_1(c_2, x_1)$.

b) x_2 aparece libre en $P_1(f_2(x_2, c_3), c_3)$.

c) x_1 aparece libre en $P_1(f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3)), f_1(c_1))$, pero no en $(\exists x_1\ P_1(f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3)), f_1(c_1)))$.

d) La variable x_1 aparece libre en $P_1(f_1(f_2(x_1, x_1)), f_1(f_2(x_1, x_1)))$ y por lo tanto en toda la fórmula, ya que no aparece en la otra parte de la misma y la negación no liga variables; lo mismo pasa con x_9, que está libre en $(\exists x_3\ P_1(x_9, x_3))$, en cambio x_3 está ligada en esta última parte de la fórmula.

e) x_1 aparece libre en $P_1(f_1(f_2(f_1(x_1), x_1)), f_1(f_2(x_1, c_1)))$ y en $P_1(c_2, x_1)$, pero no en $(\forall x_1\ (P_1(f_1(f_2(f_1(x_1), x_1)), f_1(f_2(x_1, c_1))) \wedge P_1(c_2, x_1)))$.

f) No hay apariciones libres de variables en la fórmula $P_1(f_1(c_2), f_2(f_1(c_2), f_1(c_2)))$, en cambio x_1 y x_2 aparecen libres en $P_1(x_2, x_1)$ y dado que no hay ningún cuantificador, también aparecen libres en la fórmula completa $(P_1(f_1(c_2), f_2(f_1(c_2), f_1(c_2))) \to P_1(x_2, x_1))$.

□

Podemos determinar las variables libres de una fórmula φ calculando la función $Libres(\varphi)$, la que se define recursivamente de la siguiente manera:

- Si φ es una fórmula atómica, entonces $Libres(\varphi)$ es el conjunto de variables que ocurren en φ.
- En cualquier otro caso:
  - Si φ es $\neg\,\psi$ entonces $Libres(\varphi) \stackrel{def}{=} Libres(\psi)$.
  - Si φ es $(\psi \vee \eta)$, o $(\psi \wedge \eta)$ ó $(\psi \to \eta)$ entonces $Libres(\varphi) \stackrel{def}{=} Libres(\psi) \cup Libres(\eta)$.
  - Si φ es $(\forall x\ \psi)$ o $(\exists x\ \psi)$ entonces $Libres(\varphi) \stackrel{def}{=} Libres(\psi) - \{x\}$.

Una variable x se dice *ligada* en φ si $\varphi = (\forall x\ \psi)$ o $\varphi = (\exists x\ \psi)$.

El concepto de variables libres y ligadas permite distinguir un subconjunto particular de fórmulas bien formadas, los *enunciados*.

Definición 7 *Un **enunciado** de un lenguaje de primer orden L_σ es una fórmula en la que no figuran variables libres.*

Ejemplo 7:

Considerando nuevamente fórmulas del lenguaje definido en el Ejemplo 4, si calculamos el conjunto de variables libres de cada una podemos decir en cada caso lo siguiente:

a) $Libres(P_1(c_2, x_1)) = \{x_1\}$.

b) $Libres(P_1(f_2(x_2, c_3), c_3)) = \{x_2\}$.

c) $Libres\ (\exists x_1\ \overbrace{P_1(f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3)), f_1(c_1))}^{\psi}) = Libres(\psi) - \{x_1\} = \{x_1\} - \{x_1\} = \emptyset.$
Por lo tanto esta fórmula es un **enunciado**.

d)
$$\begin{aligned} Libres(\neg(\overbrace{P_1(f_1(f_2(x_1, x_1)), f_1(f_2(x_1, x_1)))}^{\psi} \vee \overbrace{(\exists x_3\ \underbrace{P_1(x_9, x_3)}_{\delta})}^{\eta})) &= Libres(\psi \vee \eta) \\ &= Libres(\psi) \cup Libres(\eta) \\ &= \{x_1\} \cup \{Libres(\delta) - \{x_3\}\} \\ &= \{x_1\} \cup \{\{x_9, x_3\} - \{x_3\}\} \\ &= \{x_1, x_9\} \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} Libres\ (\forall x_1(\overbrace{P_1(f_1(f_2(f_1(x_1), x_1)), f_1(f_2(x_1, c_1)))}^{\psi} \wedge \overbrace{P_1(c_2, x_1)}^{\eta})) &= Libres(\psi \wedge \eta) - \{x_1\} \\ &= \{Libres(\psi) \cup Libres(\eta)\} - \{x_1\} \\ &= \{\{x_1\} \cup \{x_1\}\} - \{x_1\} = \emptyset \end{aligned}$$

Esta fórmula es un **enunciado**, porque la variable x_1 era la única variable libre de $(\psi \wedge \eta)$ y x_1 está ligada por el cuantificador $\forall$ en $(\forall x_1(\psi \wedge \eta))$.

f)
$$\begin{aligned} Libres(\overbrace{P_1(f_1(c_2), f_2(f_1(c_2), f_1(c_2)))}^{\psi} \rightarrow \overbrace{P_1(c_2, x_1)}^{\eta}) &= Libres(\psi) \cup Libres(\eta) \\ &= \emptyset \cup \{x_1\} = \{x_1\}. \end{aligned}$$

□

Definición 8 *Sea φ una fórmula de L_σ en la que, las únicas variables que figuran en ella son $x_1, \ldots, x_k$, entonces $(\forall x_1(\forall x_2 \ldots (\forall x_k\ \varphi) \ldots)$ y $(\exists x_1(\exists x_2 \ldots (\exists x_k\ \varphi) \ldots)$ son enunciados de L_σ, y se conocen como la* ***clausura universal*** *de φ y la* ***clausura existencial*** *de φ, respectivamente.*

A continuación veremos otro procedimiento para obtener enunciados a partir de fórmulas que no lo son; éste se basa en la *sustitución de variables*. Este proceso permite obtener una nueva fórmula, en la cual una determinada variable es *reemplazada* por un término particular. Sin embrago, es necesario *no modificar* el significado de la fórmula original.

Comencemos por analizar la sustitución de variables en los términos:

Sean s y t términos de un lenguaje L_σ, y sea x una variable. Con $t(x/s)$ designamos al término que se obtiene sustituyendo en t todas las apariciones de la variable x por el término s. Más precisamente, $t(x/s)$ se define por inducción en la complejidad de t del modo siguiente:

1. Sea $comp(t) = 0$, entonces t es una constante o una variable. Si t es una constante, no hay nada que sustituir; en otro caso si t es distinto de x, entonces el término no cambia, es decir que $t(x/s)$ es t. Si t es la variable x, entonces $t(x/s)$ cambia a s.

2. Sea $comp(t) = n > 0$ y supongamos que hemos definido $u(x/s)$ para todo término u tal que $comp(u) < n$. Entonces, hay un único $k \geq 1$, un único $f \in \mathcal{F}$ de aridad k y una única k-upla de términos $t_1, \ldots, t_k$ tales que $t = f(t_1, \ldots, t_k)$.
   Como $comp(t_i) < comp(t) = n$, por la hipótesis inductiva está definida $t_i(x/s)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, luego
   $$t(x/s) \text{ es } f(t_1(x/s), \ldots, t_k(x/s))$$

Ejemplo 8:

Si se considera a s como el término por el cual se va a sustituir la variable x, y siendo $s = c_1$ en un caso y $s = f(c_4, c_2)$ en otro, veamos qué termino se obtiene al realizar $t(x/s)$ en cada uno de los siguientes casos.

	$t(x/s)$ con $s = c_1$	$t(x/s)$ con $s = f(c_4, c_2)$
$t = c_8$	c_8	c_8
$t = x$	c_1	$f(c_4, c_2)$
$t = f_1(x)$	$f_1(c_1)$	$f_1(f(c_4, c_2))$
$t = f_2(x, y)$	$f_2(c_1, y)$	$f_2(f(c_4, c_2), y)$
$t = f_1(f_2(z, y))$	$f_1(f_2(z, y))$	$f_1(f_2(z, y))$

$\square$

Veamos ahora cómo se realiza la sustitución de una variable por un término en una fórmula. Analicemos el siguiente ejemplo: supongamos que tenemos un vocabulario donde $P \in \mathcal{P}$ es un símbolo de predicado binario, $f \in \mathcal{F}$ es un símbolo de función unario y $c \in \mathcal{C}$ una constante; consideremos a φ como $(\forall x_1 P(x_1, x_2))$ y el término por el que se quiere sustituir una variable es $s = f(c)$. Entonces si queremos obtener $\varphi(x_1/s)$ y sustituimos las apariciones de x_1 por s en φ, obtenemos la expresión $(\forall f(c) P(f(c), x_2))$, lo que claramente no es una fórmula, puesto que el cuantificador universal aparece acompañando a un símbolo de función, mientras que según la definición de fórmula se permite aplicar los cuantificadores sólo a variables. Esto indica que la sustitución de variables no se puede realizar sobre cualquier variable; es por tal razón que se restringe la sustitución únicamente a variables *que figuren libres* en una fórmula; en este caso sólo x_2 puede ser sustituida.

Consideremos nuevamente la fórmula φ definida antes, pero ahora el término para sustituir a la variable libre será $s = x_1$. Al operar para obtener $\varphi(x_2/s)$ sustituyendo la variable x_2 por s, se llega a $(\forall x_1 P(x_1, x_1))$, esta expresión si cumple con la definición de fórmula, pero intuitivamente vemos que la fórmula obtenida tiene un sentido distinto de la original, pues estamos sustituyendo la variable libre x_2 por la variable x_1, que aparece afectada por el cuantificador universal. No es lo mismo decir que dos elementos del universo, que pueden ser iguales o no, tienen una determinada propiedad o relación P, a decir que un elemento tiene una relación o propiedad con si mismo. Por ejemplo, si se toma $P(x, y) = x \leq y$, entre los número naturales, la fórmula original resulta falsa dado que los números naturales no tiene un máximo; pero la fórmula que se obtiene luego de sustituir x_2 resulta verdadera, porque todo natural es igual a sí mismo. Cuando se sustituye una variable se pretende hacerlo de forma tal que lo que expresa la fórmula no varíe, por lo tanto no se puede sustituir una variable por cualquier término.

Entonces, para evitar estos problemas nos restringiremos a sustituir sólo ***variables libres*** por ***términos sin variables***. A continuación vamos a definir cómo se lleva a cabo este proceso en las fórmulas bien formadas.

Sean φ una fórmula, x una variable y t un término sin variables de un lenguaje L_σ. Con $\varphi(x/t)$ indicamos la expresión que se obtiene sustituyendo todas las apariciones libres de x en φ por t. Más precisamente, podemos definir $\varphi(x/t)$ por inducción en la complejidad de φ del modo siguiente:

Sea la $comp(\varphi) = 0$. Entonces φ es una fórmula atómica, y hay un único $k \geq 1$, un único símbolo de predicado $P \in \mathcal{P}$ de aridad k y una única k-upla de términos $t_1, \ldots, t_k$ tales que φ es $P(t_1, \ldots, t_k)$. Definimos $\varphi(x/t)$ como

$$P(t_1(x/t), \ldots, t_k(x/t))$$

Es decir que obtenemos la fórmula atómica que se logra al aplicar el símbolo de predicado P a los k términos t_i en los cuales se ha sustituido la variable x por el término t, según se definió anteriormente.

Sea ahora la $comp(\varphi) = n > 0$ y supongamos que hemos definido $\psi(x/t)$ y $\eta(x/t)$ para toda fórmula ψ y η tal que $comp(\psi)$ y $comp(\eta)$ son $< n$. Definiremos $\varphi(x/t)$ de acuerdo a los casos posibles, a saber:

1. Cuando φ es $\neg\psi$ entonces $\varphi(x/t)$ es $\neg\psi(x/t)$.
2. Cuando φ es $(\psi * \eta)$, donde $*$ representa uno de los conectivos $\vee$, $\wedge$ ó $\rightarrow$. Definimos $\varphi(x/t)$ como $(\psi(x/t) * \eta(x/t))$.
3. Cuando φ es $(\Delta y\ \psi)$, donde Δ denota uno de los cuantificadores $\forall$ ó $\exists$. Si x es igual a y, definimos $\varphi(x/t) = \varphi$. Si x es distinto de y, definimos $\varphi(x/t) = (\Delta y\ \psi(x/t))$.

Notar que en el caso 3, si la variable que se quiere sustituir es la variable ligada por uno de los cuantificadores, entonces la fórmula no cambia, es decir no se hace la sustitución ya que sólo se pueden sustituir variables libres. En otro caso se sustituye normalmente.

En informática, la operación de sustitución es importante en la *verificación de programas.* La ejecución de un programa tiene como efecto la transformación del estado de unas variables de una condición inicial a una condición final. Verificar un programa consiste en demostrar que, si el estado inicial de las variables cumple una cierta condición inicial, entonces su estado final cumple con la condición final deseada. Las condiciones iniciales y finales se suelen representar por medio de fórmulas de la lógica de primer orden. Para asignar valores a estas condiciones se introduce una interpretación que representa el tipo de datos sobre el cuál se puede operar.

Definición 9 *Llamaremos rango cuantificacional de una fórmula φ de L_σ, y lo denotaremos como $Rq(\varphi)$, al máximo número de cuantificadores anidados que figuran en φ.*

Observemos que:

- Si φ es una fórmula atómica $\quad Rq(\varphi) \stackrel{def}{=} 0$.

- En cualquier otro caso, si φ y ψ son fórmulas:

$$\begin{aligned} Rq(\neg\varphi) &\stackrel{def}{=} Rq(\varphi). \\ Rq((\varphi \vee \psi)) = Rq((\varphi \wedge \psi)) = Rq((\varphi \rightarrow \psi)) &\stackrel{def}{=} \text{máx}\{Rq(\varphi), Rq(\psi)\}. \\ Rq((\forall x\ \varphi)) = Rq((\exists x\ \varphi)) &\stackrel{def}{=} Rq(\varphi) + 1. \end{aligned}$$

Ejemplo:
Si calculamos el rango cuantificacional a las siguientes fórmulas del lenguaje presentado en el Ejemplo 4, tenemos:

a) $Rq\ (P_1(c_2, x_1)) = 0.$

b) $Rq\ (P_1(f_2(x_2, c_3), c_3)) = 0.$

c) $Rq\ ((\exists x_1\ P_1(f_2(f_2(f_1(x_1), c_1), f_1(c_3)), f_1(c_1)))) = 1.$

d) $Rq\ ((\exists x_1\ \neg(P_1(f_1(f_2(x_1, x_1)), f_1(f_2(x_1, x_1)) \vee (\exists x_3\ P_1(x_9, x_3)))))) = 1.$

e) $Rq\ ((\forall x_1((\exists x_3\ (P_1(f_1(f_2(f_1(x_3), x_1))), f_1(f_2(x_1, c_1)))) \wedge (\forall x_2\ P_1(x_2, x_1))))) = 2.$

f) $Rq\ (P_1(f_1(c_2), f_2(f_1(c_2), f_1(c_2))) \rightarrow P_1(c_2, x_1)) = 0.$

3. Semántica del Cálculo de Predicados

Veamos ahora cómo se define la parte *semántica* del cálculo de predicados. Recordemos, la semántica es la definición de un conjunto de significados, generalmente verdadero o falso, que se puedan asociar a una fórmula bien formada. Permite definir la validez de un expresión o de un razonamiento.

Se volverán a estudiar los conceptos de validez de una fórmula, de consecuencia lógica y de equivalencia entre fórmulas en el contexto más complejo y detallado de la lógica de primer orden. A pesar de que hay muchas analogías entre la semántica del cálculo proposicional y la de la lógica de primer orden, veremos que también hay varias diferencias entre ellas. La principal es que en la lógica de primer orden no hay un algoritmo de decisión de validez de fórmulas, como veremos, se pierde la propiedad de decidibilidad. El método de las tablas de verdad del cálculo proposicional no se pueden extender a la lógica de primer orden.

3.1. Interpretación de fórmulas del lenguaje

Lo primero que se necesita es establecer un *universo del discurso*, un dominio, para definir qué tipo de objetos se está analizando. A continuación, tendremos que definir cómo asignar un significado, en el dominio elegido, a los elementos básicos del lenguaje. Finalmente, los significados de los elementos básicos nos proporcionarán, con un procedimiento recursivo, los significados de los términos y de las fórmulas.

Necesitamos entonces empezar con asignar significados a constantes, funciones, predicados y a variables. Estos conceptos se corresponden al concepto de valuación visto en el cálculo proposicional.

En lo que sigue supondremos que hemos fijado un lenguaje de primer orden L_σ, determinado por el vocabulario σ.

Definición 10 *Una interpretación $\mathcal{I}$ del vocabulario σ consiste de los siguientes elementos:*

(I1) Un conjunto $U \neq \emptyset$, llamado *el universo o dominio de la interpretación* $\mathcal{I}$. Este es el conjunto de objetos sobre el que se quiere hablar.

(I2) Para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}$ de aridad k, se establece una función total $f^{\mathcal{I}}$ de k variables sobre el universo U;

$$f^{\mathcal{I}} : U^k \longmapsto U$$

(I3) Para cada símbolo de predicado $P \in \mathcal{P}$ de aridad k, se establece una relación k-aria $P^{\mathcal{I}}$ sobre el universo U, esto es un subconjunto $P^{\mathcal{I}}$ del producto cartesiano $U^k = \overbrace{U \times \ldots \times U}^{k \;\; veces}$.

(I4) Para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$, se establece un elemento $c^{\mathcal{I}} \in U$.

Luego una interpretación $\mathcal{I}$ del vocabulario σ está determinada por la estructura

$$\mathcal{A} := \langle U, \{f^{\mathcal{I}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \{P^{\mathcal{I}}\}_{P \in \mathcal{P}}, \{c^{\mathcal{I}}\}_{c \in \mathcal{C}} \rangle$$

a la que se denomina *la estructura relacional determinada por* $\mathcal{I}$. En este caso también se suele decir que $\mathcal{A}$ es una *estructura adecuada para* L_σ o también que $\mathcal{A}$ es una σ*–estructura*.

Observar que: una interpretación $\mathcal{I}$ "interpreta" a los símbolos de función k-aria, de un vocabulario σ, como ***funciones totales*** de U^k y con imagen ***siempre*** en U (es decir, cerradas en U); cada una de las funciones $f^{\mathcal{I}}$ asigna a una determinada cantidad (k) de objetos o argumentos de U un objeto de U. A los símbolos de predicados k-arios los "interpreta" con relaciones k-arias definidas sobre el universo U y a cada símbolo de constante con un elemento del universo.

Las definiciones de las funciones y relaciones que interpretan a los símbolos de funciones y relaciones respectivamente, pueden ser *extensionales*, cuando se efectúan enumerando las tuplas que las componen, o *intensionales* (por comprensión), si se establecen a partir de otras funciones o relaciones. Las definiciones extensionales expresan conocimiento sobre situaciones particulares de los objetos de U (conocimiento factual). En cambio, las definiciones intensionales expresan conocimiento normativo sobre el dominio. Por ejemplo, si quiero definir la función suc (sucesor) para interpretar algún símbolo de función $f^{(1)}$, puedo hacerlo de la siguiente manera:

$$suc(x) = x + 1$$

Esta función está definida de manera intensional. Ahora, si defino el predicado $Estudia$ como:

$$Estudia = \{\text{ (Juan, inglés), (María, lengua), (Estela, danza), (Bruno, piano)}\}$$

Se está definiendo el predicado $Estudia$, asociado al algún símbolo de predicado $P^{(2)}$, de manera extensional.

También es posible definir una σ–estructura como un par que especifica el dominio de la estructura (U) y una función α definida sobre σ que asigna a cada símbolo de función k-aria f de $\mathcal{F}$ una función total k-aria sobre U, a cada símbolo de predicado m-ario P de $\mathcal{P}$ una relación m-aria sobre U y para cada símbolo de constante c de $\mathcal{C}$, α asigna un elemento de U. Es decir, que una σ–estructura también puede verse como el par:

$$\mathcal{A} = (U, \alpha)$$

Notar que, solamente cuando se ha dado una interpretación de los símbolos de L_σ, tiene sentido hablar de *significados* de *fbf* y por lo tanto sólo podemos hablar de la verdad o falsedad de una fórmula en el contexto de una interpretación determinada.

Dada una interpretación $\mathcal{I}$ del vocabulario σ para el lenguaje L_σ, vamos a definir, por inducción en el grado de complejidad de los términos, una interpretación $\mathcal{I}(t) \in U$ para los términos t de L_σ del modo siguiente:

1. Sea $comp(t) = 0$, luego t puede ser una variable o una constante. Sea t una constante igual a $c \in \mathcal{C}$. Definimos:

   $\mathcal{I}(t)$ como $c^{\mathcal{I}} \in U$ (o equivalentemente $\mathcal{I}(t)$ como $\alpha(c) \in U$).

2. Sea $comp(t) = n > 0$ y supongamos que hemos definido $\mathcal{I}(s)$ para todo término s de complejidad menor que n. Si t es un término de complejidad n, entonces hay un único $k \geq 1$, un único símbolo $f \in \mathcal{F}$ de aridad k y una única k-upla de términos $(t_1, \ldots, t_k)$ tales que $t = f(t_1, \ldots, t_k)$. Como $comp(t_i) < comp(t) = n$, por la hipótesis inductiva están definidas las interpretaciones $\mathcal{I}(t_i) \in U$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces definimos $\mathcal{I}(t)$ del modo siguiente:

$$\mathcal{I}(t) = f^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}(t_1), \mathcal{I}(t_2), \ldots, \mathcal{I}(t_k)) \in U$$

Diremos que el término t *designa o nombra* al elemento $\mathcal{I}(t)$ del universo U. El superíndice $\mathcal{I}$ que acompaña a las constantes y a las funciones, nos dicen que ese es el elemento del universo o la función total respectivamente, que la interpretación $\mathcal{I}$ asigna a los símbolos de constantes y de función que aparecen en el vocabulario. La definición anterior nos da un procedimiento para calcular $\mathcal{I}(t)$: reemplazar cada uno de los símbolos de constante que figuran en t por los elementos del universo U que les asigna la interpretación $\mathcal{I}$, e ir aplicando sucesivamente a los elementos de U así obtenidos las funciones que $\mathcal{I}$ le asigna a los símbolos de función que figuran en t, en el orden en que aparecen.

Veamos un ejemplo de cómo interpretar términos sin variables, ya que, si prestamos atención podemos notar que todavía no se definió cómo interpretar a las mismas.

Ejemplo 9:

Sea un lenguaje de primer orden L_σ cuyo vocabulario $\sigma = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, P^{(1)}, Q^{(2)}, a \rangle$, consta de dos símbolos de función f y g, dos símbolos de predicado P y Q y un símbolo de constante a. Consideremos la siguiente σ-estructura $\mathcal{A}$, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales con el cero $U = \mathbb{N}_0$ y la interpretación del vocabulario no lógico α es:

$$\begin{array}{rcl} a^{\mathcal{I}} & = & 0 \\ f^{\ \mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \ \ \text{donde } f^{\ \mathcal{I}}(x) = x+1 \\ g^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \ \ \text{donde } g^{\mathcal{I}}(x,y) = x+y \\ P^{\ \mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0, \ \ \text{donde } P^{\ \mathcal{I}} = \{x / x \in \mathbb{N}_0 \wedge \text{“}x \text{ es par”}\} \\ Q^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \ \ \text{donde } Q^{\mathcal{I}} = \{(x,y)/(x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \wedge \text{“}x \text{ es mayor que } y\text{”}\} \end{array}$$

Sea $t = g(f(a), a)$ un término sin variables de L_σ, su interpretación en $\mathcal{I}$ sería:

$$\mathcal{I}(g(f(a),a)) = \underbrace{\mathcal{I}(f(a)) + \mathcal{I}(a)}_{g^{\mathcal{I}}(x,y)=x+y} = \underbrace{(\mathcal{I}(a)+1)}_{f^{\ \mathcal{I}}(x)=x+1} + \underbrace{0}_{a^{\mathcal{I}}=0} = (\underbrace{0}_{a^{\mathcal{I}}=0} +1) + 0 = 1$$

Como se dijo, los términos representan elementos del universo, y es claro que el término $g(f(a), a)$ representa al 1, que es un elemento de $\mathbb{N}_0$, el universo de esta interpretación.

Analicemos otros términos sin variables de L_σ y su correspondiente interpretación en $\mathcal{I}$ (queda como ejercicio verificar cada interpretación):

1. $t = a$, entonces $\mathcal{I}(a)$ es igual a $0 \in \mathbb{N}_0$.
2. $t = f(f(a))$, entonces $\mathcal{I}(f(f(a)))$ es igual a $2 \in \mathbb{N}_0$.
3. $t = g(f(a), f(f(a)))$, entonces $\mathcal{I}(g(f(a), f(f(a))))$ es igual a $3 \in \mathbb{N}_0$.
4. $t = g(g(a, f(a)), f(g(f(a), f(f(a)))))$, entonces $\mathcal{I}(g(g(a, f(a)), f(g(f(a), f(f(a))))))$ es igual a $5 \in \mathbb{N}_0$.

Considerando el procedimiento definido para calcular $\mathcal{I}(t)$ resulta inmediatamente que:

Proposición 1 *Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos interpretaciones del vocabulario del lenguaje L_σ tales que $U^{\mathcal{I}} = U^{\mathcal{J}}$. Si para un término sin variables t de L_σ se tiene que:*

1. *$c^{\mathcal{I}}$ es igual a $c^{\mathcal{J}}$ para todo símbolo de constante c que figura en t, y*
2. *$f^{\ \mathcal{I}}$ es igual a $f^{\mathcal{J}}$ para todo símbolo de función f que figura en t*

entonces:

$$\mathcal{I}(t) \textit{ es igual a } \mathcal{J}(t)$$

En otras palabras, la *interpretación de un término sin variables t sólo depende de las interpretaciones de los símbolos de constante y de función que figuran en t.* Esto suele expresarse diciendo que la interpretación de los términos es *una propiedad local*.

Claramente para poder interpretar fórmulas de L_σ no basta con dar una interpretación $\mathcal{I}$ para cada símbolo del vocabulario σ, ya que si se quiere asignar un significado a una fórmula como $(\forall x\ (P(x, y))$ que tiene a y como variable libre, no estamos en condiciones de hacerlo con lo visto hasta ahora, porque no sabemos qué valor del dominio U interpreta a la variable y.

Entonces, necesitamos definir una función, que llamaremos de *valuación o asignación*, β que asigne a cada variable libre un valor perteneciente al dominio de la estructura U. Es decir que para cada x_i se define $\beta(x_i) = a \in U$ y así, para una interpretación $\mathcal{I}$ dada, cada variable libre tendrá un valor bien definido y entonces se puede interpretar cada término y de allí cada fórmula de L_σ.

Formalmente, si denotamos con Var al conjunto de variables de L_σ (o sea $Var = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$) dada una σ–estructura $\mathcal{A}$ se define la asignación β como una función:

$$\beta : Var \longrightarrow U$$
$$\beta(x_i) = a, \quad \text{con } x_i \in Var \text{ y } \ a \in U$$

Cada asignación β determina un único valor para cada variable del lenguaje, por lo que finalmente determina un único valor de verdad para cada fórmula φ de L_σ. Ahora sí se está en condiciones de averiguar el valor de verdad de la fórmula $(\forall x\ (P(x, y))$, ya que conocemos $\beta(y)$.

A continuación vamos a *redefinir* lo que es una interpretación $\mathcal{I}$ para un lenguaje L_σ. Sea el vocabulario $\sigma = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ y $\mathcal{A}$ una estructura adecuada para σ ($\mathcal{A} = (U, \alpha)$). Una *interpretación* $\mathcal{I}$ del vocabulario σ, se define como un par, que especifica una σ–estructura $\mathcal{A}$ y una función de asignación β, en símbolos $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ La σ–estructura $\mathcal{A}$ determina tanto el universo como las funciones, las relaciones y los elementos del mismo que interpretan cada símbolo del vocabulario, Definición 10, y la función de asignación β determina el valor del universo que toma cada variable. Es claro que si mantenemos la σ–estructura $\mathcal{A}$ y cambiamos función β, por β' por ejemplo, se tendrá una *interpretación diferente*: $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}, \beta')$.

Dada la interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ del vocabulario σ podemos completar el punto 1) de la definición de interpretación de un término $\mathcal{I}(t)$, donde solo se mencionaban los símbolos de constante. Considerando nuevamente la complejidad de los términos tenemos:

1. Si la $comp(t) = 0$, t puede ser una variable o una constante, entonces definimos en cada caso:
   - Si t es igual a $c \in \mathcal{C}$, definimos $\mathcal{I}(t)$ como $c^{\mathcal{I}} \in U$ (o equivalentemente como $\alpha(c) \in U$).
   - Si t es igual a una variable x_i, definimos $\mathcal{I}(t)$ como $\beta(x_i)$ (recordar que $\beta(x_i) \in U$).
2. Si $comp(t) = n > 0$, la interpretación de t es exactamente igual a lo definido anteriormente: sabiendo $\mathcal{I}(s)$ para todo término s de complejidad menor que n, entonces hay un único $k \geq 1$, un único símbolo $f \in \mathcal{F}$ de aridad k y una única k-upla de términos $(t_1, \ldots, t_k)$ tales que $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ y definimos $\mathcal{I}(t)$ del modo siguiente:

$$\mathcal{I}(t) = f^{\,\mathcal{I}}(\mathcal{I}(t_1), \mathcal{I}(t_2), \ldots, \mathcal{I}(t_k)) \in U$$

Veamos ahora cómo interpretamos términos con variables.

Ejemplo 10:

Sea el lenguaje de primer orden L_σ del ejemplo anterior y sea $t = g(f(x), y)$ un término de L_σ, su interpretación en $\mathcal{I}$ sería:

$$\mathcal{I}(g(f(x), y)) = \underbrace{\mathcal{I}(f(x)) + \mathcal{I}(y)}_{g^{\mathcal{I}}(x,y)=x+y} = \underbrace{(\mathcal{I}(x) + 1)}_{f^{\,\mathcal{I}}(x)=x+1} + \underbrace{\beta(y)}_{\mathcal{I}(y)=\beta(y)} = (\underbrace{\beta(x)}_{\mathcal{I}(x)=\beta(x)} + 1) + \beta(y)$$

pero no podemos decir qué valor del universo representa este término a menos que definamos la función de asignación β en $\mathcal{I}$. Consideremos que $\beta(x) = 2$ y que $\beta(y) = 5$, el término anterior representaría al elemento:

$$(\beta(x) + 1) + \beta(y) = (2 + 1) + 5 = 8$$

con $8 \in \mathbb{N}_0$. Si en cambio consideramos que $\beta'(x) = 10$ y $\beta'(y) = 10000$, este término representaría al elemento del universo:

$$(\beta(x) + 1) + \beta(y) = (10 + 1) + 10000 = 10011 \in \mathbb{N}_0$$

Aquí se puede ver cómo la interpretación de un término con variables libres cambia dependiendo del valor del universo que β asigna a cada variable.

Analicemos otros términos de L_σ y su correspondiente interpretación en $\mathcal{I}$ (queda como ejercicio verificar cada interpretación):

1. $t = a$, entonces $\mathcal{I}(a)$ es igual a $0 \in \mathbb{N}_0$.
2. $t = f(f(x))$, entonces $\mathcal{I}(f(f(x)))$ es igual a $\beta(x) + 2$ y si $\beta(x) = 4$, representa al $6 \in \mathbb{N}_0$.
3. $t = g(f(x), f(f(x)))$, entonces $\mathcal{I}(g(f(x), f(f(x))))$ es igual a $(\beta(x) + 1) + (\beta(x) + 2)$, y si $\beta(x) = 3$ entonces el término representa a $9 \in \mathbb{N}_0$.
4. $t = g(g(a, f(x)), f(g(f(x), f(f(y)))))$, entonces $\mathcal{I}(g(g(a, f(x)), f(g(f(x), f(f(y))))))$ es igual a $(0 + \beta(x)) + (((\beta(x) + 1) + (\beta(y) + 2)) + 1)$ y si consideramos a $\beta(x) = 2$ y $\beta(y) = 5$, el término representaría a $13 \in \mathbb{N}_0$.

Una vez interpretados los términos, estamos en condiciones de analizar cómo interpretar las fórmulas de L_σ. Comenzaremos por extender nuestro lenguaje original L_σ a un lenguaje $L_\sigma(\mathcal{I})$, que se obtiene agregando al conjunto de constantes $\mathcal{C}$, en el vocabulario σ de L_σ, los elementos del universo U obteniendo así un nuevo conjunto de constantes. De esta manera, el vocabulario de $L_\sigma(\mathcal{I})$ queda determinado como $\sigma(\mathcal{I}) = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{C} \cup U \rangle$.

La interpretación $\mathcal{I}$ debe extenderse a una interpretación $\mathcal{I}'$ del nuevo lenguaje $L_\sigma(\mathcal{I})$ para poder interpretar los símbolos agregados. Esto se hace agregando una nueva regla a la Definición 10 del modo siguiente:

(I5) Para todo $a \in U$, $a^{\mathcal{I}'}$ es igual a a.

Esto es, la interpretación $\mathcal{I}'$ tiene el mismo universo de $\mathcal{I}$, y coincide con $\mathcal{I}$ en la interpretación de todos los símbolos del vocabulario σ de L_σ, mientras que interpreta cada elemento del universo sumado a las constantes por sí mismo.

El lenguaje extendido $L_\sigma(\mathcal{I})$ tiene términos que no son términos de L_σ, por ejemplo, cada $a \in U$ es un término de $L_\sigma(\mathcal{I})$, pero no de $L\sigma$. Por otro lado, todo término sin variables t de L_σ es también un término sin variables de $L_\sigma(\mathcal{I})$, y por Proposición 1 resulta que $\mathcal{I}'(t)$ es igual a $\mathcal{I}(t)$.

Análogamente, si bien hay enunciados de $L_\sigma(\mathcal{I})$ que no son enunciados de L_σ, es claro que todo enunciado de L_σ es también un enunciado de $L_\sigma(\mathcal{I})$. Además, como la función de asignación β que se define en $\mathcal{I}'$ es la misma que la definida en $\mathcal{I}$, lo expresado anteriormente se extiende a *todos* los términos y a *todas* las fórmulas (no solo a los enunciados).

Vamos ahora a interpretar las fórmulas de $L_\sigma(\mathcal{I})$ como proposiciones acerca de la estructura relacional determinada por la interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$, esto es, como fórmulas acerca de $\mathcal{A}$ que pueden ser verdaderas o falsas. Por lo tanto, la interpretación consistirá en asignarle un valor de verdad a cada fórmula φ de $L_\sigma(\mathcal{I})$. En particular, le estaremos asignando un valor de verdad a cada una de las fórmulas del lenguaje original L_σ.

Para hacerlo vamos a definir una nueva función $V_\mathcal{I}$ que asigna el valor de verdad de una fórmula φ de L_σ para una interpretación dada $\mathcal{I}$. Más formalmente, si $\mathbb{F}$ es el conjunto de fórmulas del lenguaje L_σ:

$$V_\mathcal{I} : \mathbb{F} \longrightarrow \{\top, \bot\}.$$

La asignación de valores de verdad la haremos por inducción en la complejidad de las fórmulas. Pero para determinar el valor de verdad $V_\mathcal{I}$ de cualquier fórmula φ de L_σ, debemos primero interpretar los términos del lenguaje. Para ello, se reemplaza cada término t que aparece en φ, cada símbolo de función y cada símbolo de predicado por su interpretación en $\mathcal{I}'$, obteniendo así una fórmula acerca de los elementos del universo $U^{\mathcal{I}'}$, que puede ser verdadero o falso.

Sea φ una fórmula de $L_\sigma(\mathcal{I})$ de complejidad 0, entonces por la definición de complejidad es una fórmula atómica. Por lo tanto hay un único $k \geq 1$, un único $P \in \mathcal{P}$ de aridad k y una única k-upla de términos $t_1, \ldots, t_k$ tales que $\varphi = P(t_1, \ldots, t_k)$. Como se dijo anteriormente, los t_i deben ser términos del lenguaje $L_\sigma(\mathcal{I})$, y por lo tanto designan elementos $\mathcal{I}'(t_i)$ del universo U, para $i = 1, \ldots, k$. Luego la k-upla $(\mathcal{I}'(t_1), \mathcal{I}'(t_2), \ldots, \mathcal{I}'(t_k)) \in U^k$.

Entonces definimos:

$$V_\mathcal{I}(\varphi) = \top \quad \text{si } (\mathcal{I}'(t_1), \mathcal{I}'(t_2), \ldots, \mathcal{I}'(t_k)) \in P^{\,\mathcal{I}}$$
$$V_\mathcal{I}(\varphi) = \bot \quad \text{si } (\mathcal{I}'(t_1), \mathcal{I}'(t_2), \ldots, \mathcal{I}'(t_k)) \notin P^{\,\mathcal{I}}.$$

Sea $comp(\varphi) = n > 0$ y supongamos que hemos definido $V_\mathcal{I}(\psi)$ para toda fórmula ψ de $L_\sigma(\mathcal{I})$ tal que $comp(\psi) < n$. Si φ es una fórmula de complejidad n, se podía presentar uno, y sólo uno, de los siguientes casos:

1. Existe una única fórmula ψ de $L_\sigma(\mathcal{I})$ tal que $\varphi = \neg\psi$.
2. Existe un único par de fórmulas ψ, η de $L_\sigma(\mathcal{I})$ tal que $\varphi = (\psi \vee \eta)$.
3. Existe un único par de fórmulas ψ, η de $L_\sigma(\mathcal{I})$ tal que $\varphi = (\psi \wedge \eta)$.
4. Existe un único par de fórmulas ψ, η de $L_\sigma(\mathcal{I})$ tal que $\varphi = (\psi \rightarrow \eta)$.
5. Existe una única fórmula ψ de $L_\sigma(\mathcal{I})$ y una única variable x tal que $\varphi = (\forall x\ \psi)$.
6. Existe un única fórmula ψ de $L_\sigma(\mathcal{I})$ y una única variable x tal que $\varphi = (\exists x\ \psi)$.

Como en los casos 1, 2, 3 y 4 se tiene que $comp(\psi) < n$ y $comp(\eta) < n$, por la hipótesis inductiva están definidos los valores de verdad $V_\mathcal{I}(\psi)$ y $V_\mathcal{I}(\eta)$. Entonces $V_\mathcal{I}(\varphi)$es:

En el caso 1, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} \neg V_{\mathcal{I}}(\psi)$.

En el caso 2, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} V_{\mathcal{I}}(\psi) \vee V_{\mathcal{I}}(\eta)$.

En el caso 3, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} V_{\mathcal{I}}(\psi) \wedge V_{\mathcal{I}}(\eta)$.

En el caso 4, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} V_{\mathcal{I}}(\psi) \rightarrow V_{\mathcal{I}}(\eta)$.

O también lo podemos definir $V_{\mathcal{I}}(\varphi)$ como:

En el caso 1, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} \top$ si y sólo si $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \bot$.

En el caso 2, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} \top$ si y sólo si $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \top$ o $V_{\mathcal{I}}(\eta) = \top$.

En el caso 3, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} \top$ si y sólo si $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \top$ y $V_{\mathcal{I}}(\eta) = \top$.

En el caso 4, $V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} \top$ si y sólo si $V_{\mathcal{I}}(\psi) = \bot$ o $V_{\mathcal{I}}(\eta) = \top$.

Para considerar los casos 5 y 6, observemos primero que φ es una fórmula que puede tener variables libres, pero en particular x está ligada en ella. Sin embargo ψ tiene a x entre sus variables libres, por lo tanto, para cualquier elemento $a \in U$ se tiene que $\psi(x/a)$ es un fórmula de $L_\sigma(\mathcal{I})$ y dado que $comp(\psi(x/a)) = comp(\psi) < n$, por hipótesis inductiva resulta que $V_{\mathcal{I}}(\psi(x/a))$ está definido para todo $a \in U$.

En el caso 5 definimos

$$V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} \top \quad \text{si y sólo si } V_{\mathcal{I}}(\psi(x/a)) = \top \quad \text{para } \textit{todo} \text{ elemento } a \in U.$$

En el caso 6 definimos

$$V_{\mathcal{I}}(\varphi) \overset{def}{=} \top \quad \text{si y sólo si existe } \textit{al menos un} \text{ elemento } \; a \in U \; \text{ tal que } \quad V_{\mathcal{I}}(\psi(x/a)) = \top.$$

Esto completa la definición inductiva de $V_{\mathcal{I}}(\varphi)$. Insistimos que, en particular, queda definido el valor de verdad $V_{\mathcal{I}}(\varphi)$ *para toda fórmula* φ *del lenguaje original* L_σ. Más aún, se ve que la necesidad de considerar el lenguaje extendido $L_\sigma(\mathcal{I})$ aparece sólo al considerar los casos 5 y 6, en los cuales se hace referencia a todos los elementos del universo de la interpretación, y para ello necesitamos un lenguaje que nos permita mencionarlos, este lenguaje es $L_\sigma(\mathcal{I})$.

Otra manera de definir estos dos últimos casos, sin necesitar la extensión de la interpretación $\mathcal{I}$ a $\mathcal{I}'$, es considerando para β y para cada $a \in U$, una nueva función de asignación $\beta_{(x/a)}$, que se define como:

$$\beta_{(x/a)}(x_i) = \begin{cases} \beta(x_i) & \text{si } x_i \text{ es distinto de } x \\ a & \text{si } x_i \text{ es igual a } x \end{cases}$$

Donde x es la variable ligada y x_i cualquier variable libre. Así, los casos 5 y 6 se pueden redefinir como sigue, sin sustituir la variable x por los elementos del dominio U y usando esta nueva función de asignación en lugar de β, como:

Caso 5: $V_{(\mathcal{A},\beta)}(\varphi) \overset{def}{=} \top$ si y sólo si $V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/a)})}(\psi) = \top$ para todo elemento $a \in U$.

Caso 6: $V_{(\mathcal{A},\beta)}(\varphi) \overset{def}{=} \top$ si y sólo si existe un elemento $a \in U$ tal que $V_{(\mathcal{A},\beta_{(x/a)})}(\psi) = \top$.

Notar que en esta última definición de los casos 5 y 6 no usamos la notación habitual $V_{\mathcal{I}}(\varphi)$, sino que hacemos referencia directa a la función de asignación β, que en el primer caso se asume incluida en la definición de $\mathcal{I}$. Aquí se hace referencia a ella porque cada definición, nos dice que el valor de verdad de φ en la estructura $\mathcal{A}$ con la función de asignación β depende del valor de verdad de ψ en la misma estructura $\mathcal{A}$ pero con la nueva función de asignación definida $\beta_{(x/a)}$, y esto debe quedar claro en la notación.

Si consideramos sólo las fórmulas sin variables libres (enunciados), la siguiente proposición se deduce fácilmente de la Proposición 1 y de la definición inductiva de los valores de verdad de las fórmulas.

Proposición 2 *Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos interpretaciones del vocabulario σ de L_σ tales que $U^{\mathcal{I}} = U^{\mathcal{J}}$. Si para un enunciado φ de L_σ se tiene que:*

1. *$c^{\mathcal{I}}$ es igual a $c^{\mathcal{J}}$ para todo símbolo de constante c que figura en φ,*
2. *$f^{\mathcal{I}}$ es igual a $f^{\mathcal{J}}$ para todo símbolo de función f que figura en φ, y*
3. *$P^{\mathcal{I}}$ es igual a $P^{\mathcal{J}}$ para todo símbolo de predicado P que figura en φ,*

entonces:

$$V_{\mathcal{I}}(\varphi) = V_{\mathcal{J}}(\varphi).$$

Dado un enunciado φ del lenguaje L_σ, indicaremos con $\mathcal{F}_\varphi$,$\mathcal{P}_\varphi$ y $\mathcal{C}_\varphi$ respectivamente a los conjuntos de símbolos de función, de predicado y de constante que figuran en la expresión φ. Obtenemos así un vocabulario finito $\sigma_\varphi = \langle \mathcal{F}_\varphi, \mathcal{P}_\varphi, \mathcal{C}_\varphi \rangle$, que determina un "sublenguaje" de L_σ, que denotaremos con L_{σ_φ}. La Proposición 2 significa que los valores de verdad de φ dependen sólo de las interpretaciones del vocabulario restringido $\sigma_\varphi = \langle \mathcal{F}_\varphi, \mathcal{P}_\varphi, \mathcal{C}_\varphi \rangle$. Por eso se dice que *el valor de verdad de un enunciado es una propiedad local*.

Por otro lado, si consideramos al conjunto de todas las fórmulas, y considerando que una fórmula escrita de la siguiente manera $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, denota que φ es una fórmula cuyas variables libres son o están entre $\{x_1, \ldots, x_n\}$, tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 3 *Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de cierto lenguaje L_σ y sea $\mathcal{A}$ una σ–estructura, y sean β y $\beta\,'$ dos funciones de asignación tales que:*

$$\beta(x_i) = \beta\,'(x_i) \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

entonces

$$V_{(\mathcal{A},\beta)}(\varphi) = V_{(\mathcal{A},\beta\,')}(\varphi)$$

De las Propiedades 2 y 3 se desprende que dadas dos interpretaciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ del vocabulario σ, que satisfacen las condiciones mencionadas en la Propiedad 2, y además cada una tiene una función de asignación β y β' respectivamente que satisfacen la condición de la Propiedad 3. Entonces dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, se cumple que:

$$V_{\mathcal{I}}(\varphi) = V_{\mathcal{J}}(\varphi)$$

Introduciremos ahora los conceptos de satisfacibilidad, verdad lógica, equivalencia y consecuencia en forma análoga a lo hecho al estudiar el cálculo proposicional.

Definición 11 *Una fórmula φ de un lenguaje de primer orden L_σ es* ***satisfacible*** *si y sólo si existe una interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$, o sea una estructura adecuada $\mathcal{A}$ y una función de asignación β, tal que*

$$V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$$

Diremos también en ese caso, que una interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ *satisface a* φ, o que $\mathcal{I}$ es un *modelo* de φ, si $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$. En símbolos: $\mathcal{I} \models \varphi$, o lo que es lo mismo $\mathcal{A} \models_\beta \varphi$ (en esta última se denota expresamente la σ–estructura y la función de asignación). En caso de que no exista una interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ que haga verdadera a φ, se dirá que ésta es ***insatisfacible***.

En la bibliografía también suele aparecer una notación que hace referencia sólo a las fórmulas de un lenguaje L_σ que son enunciados; se escribe $\mathcal{A} \models \varphi$ para afirmar que la interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ satisface al (o es modelo del) enunciado φ. Dado que los enunciados *no* necesitan de la función β para ser interpretados, solo alcanza con la σ–estructura $\mathcal{A}$ para obtener su valor de verdad, no es necesario que la misma sea especificada, lo que es expresado claramente en esta notación.

Si en lugar de considerar una fórmula particular φ, consideramos un conjunto de fórmulas Φ, entonces, cuando una interpretación $\mathcal{I}$ hace verdaderas a todas las fórmulas del conjunto Φ, se dice que es un *modelo* para ese conjunto de fórmulas o que lo *satisface*, en símbolos $\mathcal{I} \models \Phi$. Si esta interpretación no existe entonce Φ es *insatisfacible*. Un ejemplo de conjunto insatisfacible es $\{\varphi(x), \neg\varphi(x)\}$, cualquiera sea φ.

El concepto de *consecuencia lógica* del Cálculo de Predicados es similar al del Cálculo Proposicional, sólo que se deben tener en cuenta todas las posibles interpretaciones $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$.

Definición 12 *Una fórmula φ de un lenguaje de primer orden L_σ es* ***consecuencia*** *de un conjunto de fórmulas de $L_\sigma\Phi$ y se denota $\varphi \in Cons(\Phi)$, si y sólo si para toda interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Phi$ se cumple que $\mathcal{I} \models \varphi$, es decir*

$$\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\varphi\}$$

o dicho de otra manera:

$$\varphi \in Cons(\Phi) \text{ si y sólo si } \Phi \cup \{\neg\varphi\} \text{ es insatisfacible.}$$

Ahora se va a definir un concepto relacionado con la satisfacibilidad de las fórmulas, pero que no tiene correspondencia en el Cálculo Proposicional.

Definición 13 *Una fórmula φ de un lenguaje de primer orden L_σ es* ***válida*** *o* ***verdadera*** *en una σ–estructura $\mathcal{A}$ si y sólo si cualquiera sea la función de asignación β, se cumple que $V_{(\mathcal{A},\beta)}(\varphi) = \top$.* En símbolos: $\mathcal{A} \models \varphi$

Notar que cuando se simboliza que una fórmula φ de L_σ es una fórmula válida, no se pone como subíndice el β, ya que φ debe ser verdadera independientemente de β o, lo que es lo mismo, para cualquier β. Observar además, que la forma de notar que una fórmula es válida en una σ–estructura

$\mathcal{A}$, es la misma que se usó para notar que un enunciado era satisfacible en una σ–estructura $\mathcal{A}$, esto es porque los enunciados no dependen de β para obtener su valor de verdad. Por lo tanto cuando nos referimos a enunciados de un lenguaje L_σ, podemos asegurar que si el enunciado ϕ es *satisfacible* en $\mathcal{I}$, entonces ϕ es *válido* en $\mathcal{I}$, en particular en su σ–estructura $\mathcal{A}$.

Corolario 1 *Si φ es un enunciado, o sea una fórmula sin variables libres, entonces en cada estructura adecuada $\mathcal{A}$ se cumple que: $\mathcal{A} \models \varphi$ o $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.*

Esto se debe a que dos funciones de asignación β y β' trivialmente coinciden en el conjunto de variables libres de un enunciado, porque éste es vacío, y por lo tanto por la Proposición 3, no se pueden encontrar dos valuaciones β y β' tales que $V_{(\mathcal{A},\beta)}(\varphi) \neq V_{(\mathcal{A},\beta')}(\varphi)$.

Definición 14 *Una fórmula φ de un lenguaje de primer orden L_σ es **universalmente válida** o **universalmente verdadera** si cualquiera sea la σ–estructura $\mathcal{A}$ para L_σ, se cumple que $\mathcal{A} \models \varphi$. En símbolos, podemos escribir que $\models \varphi$ para indicar que es universalmente válida, ya que que es válida en cualquier interpretación $\mathcal{I}$.*

Por ejemplo, $((\forall x\ \varphi(x)) \rightarrow (\exists x\ \varphi(x)))$ es universalmente válida, cualquiera sea φ.
Se puede ver que el concepto de universalmente verdadera o universalmente válida es análogo al de *tautología* en el Cálculo Proposicional. Todas las fórmulas de la "forma" de una tautología del Cálculo Proposicional, por ejemplo $(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$, son fórmulas universalmente válidas o verdaderas en el Cálculo de Predicados. Las fórmulas válidas no proporcionan información alguna sobre un dominio. Las fórmulas que se buscan para representar conocimiento son las satisfacibles.

Corolario 2 *Podemos definir para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$: $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$*

si y sólo si para cualquier función β tal que $\beta(x_i) = a_i$, para $1 \leq i \leq n$, se cumple que

$$V_{(\mathcal{A},\beta)}(\varphi) = \top$$

El corolario anterior asegura que alcanza con verificar que todas las posibles β de una interpretación asignen los valores $(a_1, \ldots, a_n)$ al conjunto de variables $(x_1, \ldots, x_n)$, que son las variables libres de φ, para afirmar que la σ–estructura $\mathcal{A}$ satisface a φ.

Definición 15 *Dos fórmulas φ y ψ son equivalentes para una σ–estructura $\mathcal{A}$ si $V_{(\mathcal{A},\beta)}(\varphi) = V_{(\mathcal{A},\beta)}(\psi)$ para cualquier valuación β.*

Definición 16 *Se dice que dos fórmulas φ y ψ son* equivalentes *si para toda interpretación $\mathcal{I}$ (es decir para cualquier σ–estructura y cualquier valuación β) se tiene que $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = V_{\mathcal{I}}(\psi)$.*

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 11:

Sea el mismo lenguaje de primer orden L_σ con vocabulario $\sigma = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, P^{(1)}, Q^{(2)}, a\rangle$, con dos símbolos de función f y g, dos símbolos de predicado P y Q y un símbolo de constante a. Consideremos la siguiente σ-estructura $\mathcal{A}$, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales con el cero $U = \mathbb{N}_0$ y la interpretación del vocabulario no lógico α es:

$$\begin{array}{rcl} a^{\mathcal{I}} & = & 0 \\ f^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \text{ donde } f^{\mathcal{I}}(x) = x+1 \\ g^{\mathcal{I}} & : & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0, \text{ donde } g^{\mathcal{I}}(x,y) = x+y \\ P^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0, \text{ donde } P^{\mathcal{I}} = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge \text{“}x \text{ es par”}\} \\ Q^{\mathcal{I}} & \subseteq & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \text{ donde } Q^{\mathcal{I}} = \{(x,y)/(x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \wedge \text{“}x \text{ es mayor que } y\text{”}\} \end{array}$$

Sea la siguiente fórmula atómica $\varphi = P(g(f(a), f(a)))$ de L_σ, para interpretarla en $\mathcal{I}$ es decir, decidir si es verdadera o falsa, el proceso a seguir sería el siguiente:

$$\mathcal{I}(g(f(a), f(a))) = \mathcal{I}(f(a)) + \mathcal{I}(f(a)) = (\mathcal{I}(a)+1) + (\mathcal{I}(a)+1) = (0+1) + (0+1) = 2$$

como $2 \in P^{\mathcal{I}}$, porque 2 es un número par, entonces $V_{\mathcal{I}}((P(g(f(a), f(a)))) = \top$.

Analicemos ahora la fórmula $\varphi = P(g(f(a), f(x)))$, para interpretarla en $\mathcal{I}$, decidir si es verdadera o falsa, deberíamos decidir si

$$\mathcal{I}(f(a)) + \mathcal{I}(f(x) = (\mathcal{I}(a)+1) + (\mathcal{I}(x)+1) = (0+1) + (\beta(x)+1) \in P^{\mathcal{I}}$$

pero para poder hacerlo necesitamos conocer la asignación β. Si consideramos una asignación β tal que $\beta(x) = 2$, tendríamos que es cierto que $(0+1)+(\beta(x)+1) = 4 \in P^{\mathcal{I}}$. En cambio si consideramos otra asignación β' tal que $\beta'(x) = 5$, tendríamos que $(0+1) + (\beta'(x)+1) = 7 \notin P^{\mathcal{I}}$. Entonces podemos decir que:

$$\begin{array}{lll} V_{(\mathcal{A},\beta)}(P(g(f(a), f(x)))) = \top & \text{o lo que es lo mismo que} & \mathcal{I} = (\mathcal{A},\beta) \models P(g(f(a), f(x))) \\ V_{(\mathcal{A},\beta')}(P(g(f(a), f(x)))) = \bot & \text{o lo que es lo mismo que} & \mathcal{I} = (\mathcal{A},\beta') \not\models P(g(f(a), f(x))) \end{array}$$

Se puede ver que en realidad cualquier asignación β que a x le asigne un número par hará verdadera a la fórmula.

Observemos las siguientes fórmulas atómicas y sus correspondientes valores para $V_{\mathcal{I}} = V_{(\mathcal{A},\beta)}$, considerando a $\beta(x) = 1$ y $\beta(y) = 9$, cuando sea necesario:

1. $\varphi = P(f(f(f(a))))$ donde $V_{\mathcal{I}}(P(f(f(f(a)))) = \bot$, porque $\mathcal{I}(f(f(f(a)))) = 3$ no es un número par; es decir $3 \notin P^{\mathcal{I}}$.

2. $\varphi = Q(a, f(a))$ donde $V_{\mathcal{I}}(Q(a, f(a))) = \bot$, porque $\mathcal{I}(a) = 0$ no es mayor que $\mathcal{I}(f(a)) = 1$; así $(0,1) \notin Q^{\mathcal{I}}$.

3. $\varphi = Q(g(f(a), a), a)$ donde $V_{\mathcal{I}}(Q(g(f(a), a), a)) = \top$, porque $\mathcal{I}(g(f(a), a)) = 1$ es mayor que $\mathcal{I}(a) = 0$; así $(1,0) \in Q^{\mathcal{I}}$.

4. $\varphi = P(f(f(f(x))))$ donde $V_{\mathcal{I}}(P(f(f(f(x)))) = \top$, porque $\mathcal{I}(f(f(f(x)))) = \beta(x) + 3 = 4$ es un número par; es decir $4 \in P^{\mathcal{I}}$.

5. $\varphi = Q(x, f(y))$ donde $V_{\mathcal{I}}(Q(x, f(y))) = \bot$, porque $\mathcal{I}(x) = \beta(x) = 1$ no es mayor que $\mathcal{I}(f(y)) = \beta(y) + 1 = 10$; así $(1,10) \notin Q^{\mathcal{I}}$.

6. $\varphi = Q(g(f(x), y), y)$ donde $V_{\mathcal{I}}(Q(g(f(x), y), y)) = \top$, porque $\mathcal{I}(g(f(x), y)) = (\beta(x) + 1) + \beta(y) = 11$ es mayor que $\mathcal{I}(y) = \beta(y) = 9$; así $(11, 9) \in Q^{\mathcal{I}}$.

Se puede observar que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** a las fórmulas $P(g(f(a), f(a)))$ y $Q(g(f(a), a), a)$, y por consiguiente decimos que $\mathcal{I}$ es un **modelo** para ambas, y ambas son **verdaderas o válidas** en $\mathcal{I}$ (por ser enunciados). Así, podríamos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\models P(g(f(a), f(a))) \\ \mathcal{I} &\models Q(g(f(a), a), a) \end{aligned}$$

En cambio $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ **no satisface** a las fórmulas $P(f(f(f(a))))$, $Q(a, f(a))$ y $Q(x, f(y))$, por lo tanto no es modelo de esas fórmulas, o en símbolos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\not\models P(f(f(f(a)))) \\ \mathcal{I} &\not\models Q(a, f(a)) \\ \mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta) &\not\models Q(x, f(y)) \end{aligned}$$

En el caso de la última fórmula (5.) también se puede simbolizar como: $\mathcal{A} \not\models_{\beta} Q(x, f(y))$. Entonces podemos decir que ella no es **válida o verdadera** en $\mathcal{A}$, porque existe una función de asignación β tal que $V_{(\mathcal{A},\beta)}(Q(x, f(y))) = \perp$.

Se puede verificar también que la interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ **satisface** a las fórmulas $P(f(f(f(x))))$ y $Q(g(f(x), y), y)$, y por consiguiente decimos que $\mathcal{I}$ es un **modelo** para ambas y lo podemos denotar como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\models_{\beta} P(f(f(f(x)))) \\ \mathcal{A} &\models_{\beta} Q(g(f(x), y), y) \end{aligned}$$

Análogamente, si suponemos que β hace corresponder a la variable x el primer valor y a la variable y el segundo, podemos re escribir lo anterior como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\models P(f(f(f(x))))\ [1, 9] \\ \mathcal{A} &\models Q(g(f(x), y), y)\ [1, 9] \end{aligned}$$

Si quisiéramos averiguar si las fórmulas $P(f(f(f(x))))$ y $Q(g(f(x), y), y)$ son **verdaderas o válidas** en $\mathcal{A}$, deberíamos demostrar que cada una de las posibles interpretaciones usando la σ-estructura $\mathcal{A}$ y <u>cualquier</u> asignación β, satisfacen a las fórmulas. Por ejemplo, podemos exhibir la siguiente asignación β' tal que $\beta'(x) = 2$ y $\beta'(y) = 2$ y podemos decir que:

$$V_{(\mathcal{A},\beta')}(P(f(f(f(x))))) = \perp$$

por lo cual queda demostrado que $P(f(f(f(x))))$ no es **válida o verdadera** en $\mathcal{A}$.

Si ahora analizamos la fórmula $\varphi = Q(g(f(x), y), y)$ y sabiendo que el universo son los $\mathbb{N}_0$, podemos ver que para $\mathcal{A}$ y para toda asignación β que se defina, el valor de verdad de φ es siempre $\top$, porque "si a un número y le sumamos otro, que siempre será mayor que 1, el resultado será mayor que y". Así, $Q(g(f(x), y), y)$ es **verdadera o válida** y lo denotamos como:

$$\mathcal{A} \models Q(g(f(x), y), y)$$

Queda como ejercicio demostrar que esto es cierto en $\mathcal{A}$ (sugerencia: utilice el método de demostración por reducción al absurdo).

Para determinar si $Q(g(f(x), y), y)$ es **universalmente válida o universalmente verdadera**, habría que considerar *toda* posible σ-estructura con *toda* posible asignación β. Queda como ejercicio demostrar que $Q(g(f(x), y), y)$ no es **universalmente válida** (sugerencia: busque una σ-estructura en que α interprete de distinta manera a los símbolos de función y de predicado de σ). Más adelante se verán los Árboles de Refutación para el Cálculo de Predicados, que dan otro método para demostrar si una fórmula es o no **universalmente válida o universalmente verdadera**.

Analicemos ahora algunas fórmulas un poco más complejas de L_σ y obtengamos su interpretación.

Sea $\varphi = (Q(g(f(x), y), y) \to P(f(f(x))))$

para decidir si es verdadera o falsa, debemos saber cuál es la función de asignación β. Supongamos que $\beta(x) = 4$ y $\beta(y) = 6$. Como ya sabemos interpretar los términos y las fórmulas atómicas, haríamos lo siguiente:

$$V_{(\mathcal{A},\beta)}(Q(g(f(x), y), y) \to P(f(f(y)))) = \top$$

dado que $V_{(\mathcal{A},\beta)}(Q(g(f(x), y), y)) = \top$ y $V_{\mathcal{I}}(P(f(f(x)))) = \top$ y sabemos que $\top \to \top = \top$.

Del mismo modo, y asumiendo cuando se necesite que los valores asignados por β son $\beta(x) = 4$ y $\beta(y) = 6$, estudiaremos la interpretación de las siguientes fórmulas:

1. Sea $\varphi = (\forall x\ P(x))$. Para que esta fórmula sea verdadera, tomando como x cualquier elemento a del universo (en este caso $\mathbb{N}_0$) debería ser $V_{\mathcal{I}}(P(x/a)) = \top$; pero podemos exhibir que $1 \in \mathbb{N}_0$ y $1 \notin P^{\mathcal{I}}$ y por lo tanto $V_{\mathcal{I}}(P(x/1)) = \bot$.

2. Sea $\varphi = (\forall x\ (\neg P(x) \to P(f(x))))$, se ve que $V_{\mathcal{I}}((\forall x\ (\neg P(x) \to P(f(x)))) = \top$.
   La única manera de que φ fuera falsa sería que para algún $a \in \mathbb{N}_0$, siendo $V_{\mathcal{I}}(\neg P(x/a)) = \top$, fuera $V_{\mathcal{I}}(P(f(x/a))) = \bot$; pero si $V_{\mathcal{I}}(\neg P(x/a)) = \top$ significa que a no es un número par, pero $f(a)$ si lo sería y por consiguiente en ese caso debería también ser $V_{\mathcal{I}}(P(f(x/a))) = \top$.

3. Sea $\varphi = (\exists x\ (P(x) \land Q(f(x), x)))$, resulta que $V_{\mathcal{I}}((\exists x\ (P(x) \land Q(f(x), x)))) = \top$.
   Es claro que existe un elemento como el $2 \in \mathbb{N}_0$ tal que $V_{\mathcal{I}}((P(x/2) \land Q(f(x/2), x/2))) = \top$, ya que $V_{\mathcal{I}}(P(x/2)) = \top$ y $V_{\mathcal{I}}(Q(f(x/2), x/2)) = \top$, porque $2 \in P^{\mathcal{I}}$ y $(3, 2) \in Q^{\mathcal{I}}$.

4. Sea $(\varphi = \forall x\ (P(x) \lor P(f(x))))$, entonces $V_{\mathcal{I}}((\forall x\ (P(x) \lor P(f(x)))) = \top$.
   Para que φ fuera falsa debería existir un $a \in \mathbb{N}_0$ tal que $V_{\mathcal{I}}((P(x/a) \lor P(f(x/a)))) = \bot$, pero en ese caso deberían ser $V_{\mathcal{I}}(P(x/a)) = \bot$ y también $V_{\mathcal{I}}(P(f(x/a))) = \bot$ y eso significaría que a es impar y su sucesor también, lo cual es absurdo en $\mathbb{N}_0$.

5. Sea $\varphi = ((\forall x\ P(x)) \lor Q(y, x))$, con $V_{\mathcal{I}}((\forall x\ P(x)) \lor Q(y, x))) = \top$.
   Dado que $V_{\mathcal{I}}((\forall x\ P(x))) = \bot$, porque no todo número en $\mathbb{N}_0$ es par, independientemente de β; además $V_{\mathcal{I}}(Q(y, x)) = \top$, ya que $\beta(y)$ es mayor que $\beta(x)$ ($(6, 4) \in Q^{\mathcal{I}}$). Así $V_{\mathcal{I}}(((\forall x\ P(x)) \lor Q(x, y))) = \top$ porque sabemos que $\bot \lor \top = \top$. Es claro que no podemos hacer uso de β para evaluar la fórmula a la izquierda del conectivo $\lor$ porque se usa la asignación sólo cuando las variables aparecen libres y x en dicha fórmula aparece ligada por el cuantificador $\forall$.

6. Sea $\varphi = (\neg P(x) \to P(f(x)))$ se ve que $V_{\mathcal{I}}((\neg P(x) \to P(f(x)))) = \top$.
   Como $V_{\mathcal{I}}(\neg P(x)) = \bot$, sabemos que sin importar el valor de $V_{(\mathcal{A},\beta)}(P(f(x)))$ el condicional será verdadero.

7. Sea $\varphi = (\exists x\ (P(x) \wedge Q(f(x), y)))$, su interpretación es $V_{\mathcal{I}}((\exists x\ (P(x) \wedge Q(f(x), y)))) = \top$.
   Es claro que existe, por ejemplo, el elemento $6 \in \mathbb{N}_0$ tal que $V_{\mathcal{I}}((P(x/6) \wedge Q(f(x/6), y))) = \top$, ya que $V_{\mathcal{I}}(P(x/6)) = \top$ y $V_{\mathcal{I}}(Q(f(x/6), y)) = \top$, porque $6 \in P^{\mathcal{I}}$ y $(6+1) = 7$ es mayor que $\beta(y) = 6$, así $(7, 6) \in Q^{\mathcal{I}}$. Cabe destacar que hacemos uso del valor de $\beta(y)$ para decidir sobre la verdad de la fórmula dado que y es la única variable que aparece libre (x está ligada por el cuantificador $\exists$).

Resumiendo, puede observarse que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** a las fórmulas que aparecen en 2, 3, y 4, y por consiguiente decimos que $\mathcal{I}$ es un **modelo** para todas ellas, y todas son **verdaderas o válidas** en $\mathcal{I}$ por ser enunciados. Así, podemos escribir

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I} & \models & (\forall x\ (\neg P(x) \to P(f(x)))) \\ \mathcal{I} & \models & (\exists x\ (P(x) \wedge Q(f(x), x))) \\ \mathcal{I} & \models & (\forall x\ (P(x) \vee P(f(x)))) \end{array}$$

Por otro lado, es cierto que la interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ también **satisface** a las fórmulas que aparecen en 5, 6, 7 y $(Q(g(f(x), y), y) \to P(f(f(x))))$, y por consiguiente también decimos que $\mathcal{I}$ es un **modelo** para todas ellas; pero en este caso no podemos afirmar que todas ellas son válidas en esta interpretación. En símbolos, podemos escribir:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I} & \models & (Q(g(f(x), y), y) \to P(f(f(x)))) \\ \mathcal{I} & \models & ((\forall x\ P(x)) \vee Q(y, x)) \\ \mathcal{I} & \models & (\neg P(x) \to P(f(x))) \\ \mathcal{I} & \models & (\exists x\ (P(x) \wedge Q(f(x), y))) \end{array}$$

o equivalentemente:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A} & \models & (Q(g(f(x), y), y) \to P(f(f(x))))\ [4, 6] \\ \mathcal{A} & \models & ((\forall x\ P(x)) \vee Q(y, x))\ [4, 6] \\ \mathcal{A} & \models & (\neg P(x) \to P(f(x)))\ [4, 6] \\ \mathcal{A} & \models & (\exists x\ (P(x) \wedge Q(f(x), y)))\ [4, 6] \end{array}$$

Analicemos ahora si entre estas últimas fórmulas hay alguna que sea válida en $\mathcal{A}$. Si estudiamos a $\varphi = (\neg P(x) \to P(f(x)))$, se puede ver que es **verdadera o válida** en $\mathcal{A}$, porque cualquiera sea el valor que β le asigne a la variable x, el condicional será siempre verdadero, ya que si $\beta(x)$ es un número par, $V_{\mathcal{I}}(\neg P(x)) = \bot$ y la formula φ será verdadera; si en cambio $\beta(x)$ es un número impar, el antecedente de la formula será verdadero y también lo será el consecuente, por lo tanto $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = \top$. Esto puede denotarse como:

$$\mathcal{A} \models (\neg P(x) \to P(f(x)))$$

Queda como ejercicio analizar si las fórmulas $(Q(g(f(x), y), y) \to P(f(f(x))))$, $((\forall x\ P(x)) \vee Q(y, x))$ y $(\exists x\ (P(x) \wedge Q(f(x), y)))$ son válidas o verdaderas en $\mathcal{A}$.

Sabiendo que $\varphi = (\neg P(x) \rightarrow P(f(x)))$ es válida en $\mathcal{I}$, podemos pensar en analizar si es **universalmente verdadera o universalmente válida**. Para ello deberíamos comprobar que sea verdadera independientemente de la σ-estructura y de la asignación β consideradas. En este caso, se puede ver que si f se interpretara como $f(x) = x + 2$ (manteniendo la misma interpretación para todos los demás símbolos del vocabulario), la formula no sería verdadera para cualquier asignación β usada (confirmarlo considerando, por ejemplo, que $\beta(x) = 5$), por lo tanto esta fórmula **no es** *universalmente válida*.

Para analizar si alguno de los enunciados es universalmente válido o universalmente verdadero, también deberíamos ver si son válidos para *cualquier* interpretación $\mathcal{I}$. Por ejemplo, si consideramos a $\vartheta = (Q(g(f(a), a), a) \rightarrow P(f(f(a))))$, podemos notar que al interpretar a la constante a como el valor $1 \in \mathbb{N}_0$, manteniendo la interpretación de todos los demás símbolos del vocabulario σ, se llega a que $V_{\mathcal{I}}((Q(g(f(a), a), a) \rightarrow P(f(f(a))))) = \perp$, lo que nos asegura que el enunciado ϑ no es *universalmente válido*.

Queda como ejercicio demostrar que los demás enunciados no son universalmente válidos.(sugerencia: para cada uno de ellos encuentre una interpretación en que se haga falso). Además, analizar si las fórmulas $(Q(g(f(x), y), y) \rightarrow P(f(f(x))))$, $((\forall x\ P(x)) \vee Q(y, x))$ y $(\exists x\ (P(x) \wedge Q(f(x), y)))$ son universalmente válidas o universalmente verdaderas. $\square$

Observación

Podemos encontrar algunas diferencias al interpretar enunciados o interpretar fórmulas con variables libres:

- Para interpretar enunciados, es decir fórmulas sin variables libres, sólo necesitamos conocer la σ-estructura y en ese caso usamos indistintamente la interpretación $\mathcal{I}$ o la σ-estructura $\mathcal{A}$ (porque no es necesaria la asignación β).
- Para interpretar fórmulas, que tienen variables libres, necesitamos conocer no sólo la σ-estructura sino también la asignación β a usar. En ese caso no podemos usar indistintamente la interpretación $\mathcal{I}$ o la σ-estructura $\mathcal{A}$, porque la interpretación consta de la σ-estructura $\mathcal{A}$ y de β (es necesaria la asignación β para poder interpretar en U a las variables libres).

4. Limitaciones de la Lógica de Primer Orden

Recapitulando, el cálculo proposicional permite formalizar y teorizar sobre la validez de una gran cantidad de enunciados y argumentaciones, pero resulta limitada cuando surge la necesidad de representar objetos, propiedades de los mismos y relaciones entre estos objetos; éste ya no tiene las herramientas para hacerlo. Por esto se recurre a la lógica de predicados, también llamada de *primer orden*, que sí permite referirnos a objetos particulares del universo, o a todos los objetos del universo., expresando propiedades y relaciones entre ellos.

Sin embargo, a veces esto también resulta limitado, cuando surge la necesidad de representar propiedades de relaciones, es decir relaciones entre relaciones; con la lógica de primer orden no es posible hacerlo. Aquí aparece la necesidad de definir un nuevo lenguaje que permite expresar relaciones entre relaciones y se conoce como *lógica de segundo orden*, y así sucesivamente; cuando el lenguaje utilizado nos limita con respecto a lo que se quiere expresar, se busca uno más potente.

En la actualidad se hace uso de distintos tipos de lógicas (Modal, Temporal, Difusa) que se aplican a campos específicos como la lingüística computacional, la inteligencia artificial o la informática en general, la industria, la robótica, vehículos y conducción autónoma, Bases de Datos difusas, etc. Algunas de las lógicas no clásicas por ejemplo, permiten dar una interpretación probabilista de la incertidumbre.

Reconocimientos

El presente apunte se realizó tomando como base el Apunte de *Cálculo Proposicional* del **Dr. Roberto Cignoli** de la Universidad de Buenos Aires, el libro *Lógica para informática* de **Claudia Pons, Ricardo Rosenfeld y Clara Smith** de Facultad de Informática de la Universidad Nacional de La plata (UNLP), el Libro *Lógica para Matemáticos* de **A. Hamilton** de Editorial Paraninfo y notas de clase del *Curso de Lógica y Computación* dictado por el **Dr. Guillermo Martínez** en la Universidad Nacional de San Luis.