Cálculo Proposicional

4. Un Sistema Deductivo para el Cálculo Proposicional

Como ya se comentó, el estudio de la lógica pretende efectuar un análisis del proceso de deducción. Ya se ha visto cómo abstraer la forma de los enunciados y las argumentaciones con el fin de ver más claramente las relaciones entre ellas y de dar una definición intuitiva de argumentación válida. Las tablas de verdad permiten responder muchas de las preguntas importantes como si una forma de declarativa dada es una tautología, es contradicción o ninguna de las dos, y si implica lógicamente o es lógicamente equivalente a alguna otra forma de declarativa dada. Sin embargo siguen siendo válidas algunas preguntas como por ejemplo, ¿hay algún procedimiento sencillo que permita construir una argumentación paso a paso, sabiendo que cada paso es válido? ¿En qué se podría basar un procedimiento de este tipo? No es posible deducir algo a partir de la nada, sino que se deben hacer algunas suposiciones iniciales.

Para investigar este tipo de problemas, se va a introducir la idea de *Sistema Deductivo Formal*. La palabra *formal* aparece con frecuencia en libros de texto de lógica, sin que se dé explicación de ella. Se usa para referirse a una situación en la que se emplean símbolos cuyo comportamiento y propiedades están completamente determinados por un conjunto dado de reglas. En un sistema formal los símbolos carecen de significado, y al manejaros hay que tener cuidado de no presuponer nada de sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema. Este es el único modo de estar seguros de que todas las suposiciones que se hagan a lo largo de una demostración son explicitas.

Entonces, un mecanismo formal de razonamiento (o de inferencia, deducción, demostración) consiste en una colección de reglas que pueden ser aplicadas sobre cierta información inicial para derivar alguna información adicional, en una forma puramente sintáctica. Se comenzará dando una definición general de lo que constituye un sistema deductivo.

Para especificar un sistema deductivo se requieren:

1. Un ***alfabeto*** de símbolos. El alfabeto de un sistema formal es el conjunto de símbolos que pertenecen al lenguaje del sistema en el que se necesita trabajar.

2. Un conjunto de cadenas finitas de dichos símbolos, llamadas ***fórmulas bien formadas*** (*fbf*). Una vez definido el alfabeto, se debe determinar qué combinaciones de símbolos pertenecen al lenguaje del sistema. Esto se logra mediante una gramática formal, la misma consiste en un conjunto de reglas que definen las cadenas de caracteres que pertenecen al lenguaje. Las cadenas de caracteres construidas según estas reglas son la *fórmulas bien formadas*.

3. Un conjunto de fórmulas bien formadas, llamadas ***axiomas***. Los axiomas de un sistema axiomático son un conjunto de *fbf* que se asumen como verdaderas (si se realiza la tabla de verdad de las mismas se puede ver que son tautologías) y se toman como punto de partida para las demostraciones.

4. Un conjunto finito de ***reglas de deducción***(o de inferencia). Una regla de inferencia es una función que asigna una fórmula (conclusión) a un conjunto de fórmulas (premisas). Es decir, estas reglas

permiten inferir una fórmula bien formada A como *consecuencia directa* de un conjunto finito de *fbfs*, como por ejemplo $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$. Naturalmente la idea es que las reglas de inferencia transmitan la verdad de las premisas a la conclusión, es decir que sea imposible alcanzar una conclusión falsa a partir de premisas verdaderas.

A partir de los cuatro componentes de un sistema formal, pueden construirse deducciones por medio de la aplicación sucesiva de las reglas de deducción a partir de axiomas. Estas deducciones pueden estar relacionadas con la deducción lógica o no, esto depende del sistema formal particular considerado, ya que se puede definir un sistema formal para hacer deducciones matemáticas, por ejemplo, o de cualquier ámbito en el que se necesite hacer deducciones.

4.1. El Sistema Formal $\mathcal{L}$

A continuación se presenta un mecanismo formal estándar de deducción para la lógica proposicional, se describirá un sistema axiomático (o deductivo) llamado *Sistema Formal* $\mathcal{L}$

Definición 1 *El sistema formal* $\mathcal{L}$ *del cálculo proposicional se define como:*

- ***Alfabeto*** *de símbolos (infinito):* $\rightarrow, \neg, (,), p_1, p_2, p_3, ...$
- ***Conjunto de fbfs****, especificado a través de una regla inductiva (gramática) con tres partes:*

  (i) p_i *es una fbf para todo* $i \geq 1$.

  (ii) *Si* A *y* B *son fbfs, entonces* $(\neg A)$ *y* $(A \rightarrow B)$ *son fbfs.*

  (iii) *El conjunto de todas las fbfs es el generado por (i) e (ii).*

- ***Axiomas****. Hay infinitos axiomas, entonces en lugar de mencionarlos a todos, se los va a especificar por medio de tres* ***esquemas de axiomas***.[1]
  Sean las fbfs A, B *y* C*; las fórmulas bien formadas obtenidas por los siguientes esquemas son axiomas de* $\mathcal{L}$*:*

  L1 : $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
  L2 : $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
  L3: $(((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow A))$

- ***Reglas de inferencia****. El sistema* $\mathcal{L}$ *tiene una única regla de inferencia, el Modus Ponens(MP), que afirma:*

  MP: a partir de A *y de* $(A \rightarrow B)$ *se deduce* B

  Siendo A *y* B *fbfs cualesquiera de* $\mathcal{L}$*.*

Algo a tener en cuenta es que las A, B y C mencionadas tanto en los axiomas como en la regla de inferencia de $\mathcal{L}$, pueden ser sustituidas por *cualquier fórmula bien formada.*.

El alfabeto y el conjunto de *fbfs* se han escogido de modo que representen de alguna manera las fórmulas o proposiciones del Cálculo Proposicional, así que la definición es muy parecida a la definición de fórmula vista en el apunte de sintaxis. Algunos símbolos como $\wedge, \vee$ no aparecen en el alfabeto de $\mathcal{L}$,

[1] El conjunto de axiomas que usa este sistema formal es muy conocido para la lógica proposicional ya que fue definido por J. Lukasiewicz.

por lo tanto las expresiones en las que éstos intervengan no son parte de $\mathcal{L}$. La limitación en el número de conectivos se hace para que el sistema formal sea más sencillo, ya que si se hubiera incluido, por ejemplo $\wedge$, en el alfabeto de símbolos, también se deberían haber incluido axiomas y/o reglas de deducción para gobernar su comportamiento y para hacer explicita su conexión con el símbolo $\rightarrow$, ya que los símbolos de este lenguaje no tienen propiedades prefijadas; todas sus propiedades han de ser derivables a partir de la información contenida en la definición de $\mathcal{L}$.

La falta de algunos símbolos del Cálculo Proposicional no debe preocupa ya que, como se ha visto, $\{\rightarrow, \neg\}$ es un conjunto adecuado de conectivos, de manera que toda función de verdad estará representada por alguna *fbf* de $\mathcal{L}$ y toda fórmula será lógicamente equivalente a alguna *fbf* de $\mathcal{L}$. No obstante, hay que tener en cuenta que las nociones de proposiciones y equivalencia lógica pertenecen al Cálculo Proposicional y no tienen lugar en el sistema formal $\mathcal{L}$.

SI se considera la regla de inferencia de este sistema, el Modus Ponens, ésta es una regla muy razonable desde el punto de vista intuitivo, corresponde a una de las maneras estándar de proceder en una argumentación en el lenguaje cotidiano. Por otro lado,los axiomas de $\mathcal{L}$ no resultan tan intuitivos, y no son los únicos posibles, se podría tener un sistema formal con un conjunto de axiomas distintos. Si se los analiza un poco, considerándolos como fórmulas del Cálculo Proposicional, se verá que son tautologías, obviamente es indispensable comenzar a razonar desde elementos verdaderos.

A continuación se verá cómo se utiliza el sistema formal $\mathcal{L}$ para hacer deducciones.

Una demostración (o prueba) es una sucesión finita de aplicaciones de reglas de inferencia que permite llegar a una conclusión a partir de determinadas premisas o axiomas. Como la implicación de una fórmula a otra es una relación transitiva, la idea es que todas las fórmulas que se vayan obteniendo sucesivamente estén implicadas por las premisas o axiomas, entonces

Definición 2 *Una **demostración** en $\mathcal{L}$, es sucesión finita de fórmulas bien formadas $A_1, A_2, ..., A_n$, tal que para todo i, con $1 \leq i \leq n$,*

(a) *A_i es un axioma de $\mathcal{L}$,*

(b) *o bien se deduce de miembros anteriores de la sucesión digamos A_j y A_k, con $j < i, k < i$, como consecuencia directa de la aplicación de la regla de inferencia MP.*

Una demostración obtenida de esta manera será una *demostración de A_n* en $\mathcal{L}$, y también se dirá que A_n es un *teorema* de $\mathcal{L}$.

Luego, un **teorema** es una fórmula válida, demostrable, que se obtiene como resultado de una *demostración* en el sistema formal. Por lo tanto decimos que una *fbf A* es un teorema si es un *axioma*, o si se obtiene como *conclusión de una demostración* en el Sistema formal $\mathcal{L}$.

Observación 1

1. Es claro que en la definición anterior, A_j y A_k necesariamente deben ser de las formas B y $(B \rightarrow A_i)$ respectivamente, o viceversa.

2. Si $A_1, A_2, ..., A_n$ es una demostración en $\mathcal{L}$ y $k < n$, entonces

   $$A_1, A_2, ..., A_k \text{ es también una demostración en } \mathcal{L}.$$

   Evidentemente, satisface la definición, de modo que es un teorema de $\mathcal{L}$.

3. Los axiomas de $\mathcal{L}$ son ciertamente teoremas de $\mathcal{L}$. Sus demostraciones en $\mathcal{L}$ son sucesiones con un solo miembro.

Ejemplo: La siguiente sucesión finita es una demostración de $((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$ en $\mathcal{L}$.

(1) $(p_1 \to (p_2 \to p_1))$	Axioma *L1*
(2) $((p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)))$	Axioma *L2*
(3) $((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$	*MP* entre (1) y (2).

Se deduce que $((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$ es un teorema de $\mathcal{L}$.

Entonces, una demostración en $\mathcal{L}$ es una demostración de una *fbf* a partir de los axiomas, pero se necesitará también el concepto más general de deducción a partir de un conjunto de *fbfs* dado.

Definición 3 *Sea Γ un conjunto de fbfs de $\mathcal{L}$ (que pueden o no ser axiomas o teoremas de $\mathcal{L}$). Una sucesión finita $A_1, A_2, ..., A_n$ de fbfs de $\mathcal{L}$ es una* ***deducción a partir de*** *Γ si para todo i, con $1 \leq i \leq n$ se verifica alguna de las condiciones siguientes:*

(a) *A_i es un axioma de $\mathcal{L}$.*

(b) *A_i es miembro de Γ.*

(c) *A_i se deduce directamente de dos miembros anteriores de la sucesión mediante MP.*

Así pues, una deducción a partir de Γ puede verse como una demostración en la cual los miembros de Γ se consideran *temporalmente* como axiomas. El último miembro A_n de una sucesión finita que sea una deducción a partir de Γ, se dice que es *deducible* a partir de Γ, o que es una consecuencia de Γ en $\mathcal{L}$.

Definición 4 *Si una fbf A es el último miembro de alguna deducción a partir de Γ, diremos que A es* ***derivable*** *a partir de Γ y se usará la notación*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A$$

para especificarlo.

Esta notación se lee: A partir de los elementos del conjunto Γ se infiere A. El subíndice $\mathcal{L}$ especifica qué sistema deductivo se utiliza para llevar a cabo la prueba, si no se supiera el sistema utilizado o se utilizara una notación más general, se escribiría

$$\Gamma \vdash_{SD} A$$

donde SD representa algún sistema de deducción.

Si se considera la definición 2, se ve que todo teorema de $\mathcal{L}$ es deducible a partir del conjunto vacío de *fbfs*. Una demostración en $\mathcal{L}$ es una deducción a partir de $\emptyset$, de manera que si A es un teorema de $\mathcal{L}$ se puede escribir $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} A$,o más sencillamente y para abreviar $\vdash_{\mathcal{L}} A$.

Notar la diferencia entre los símbolos $\vdash$ y $\models$, el primero, que se está considerando ahora, se asocia a lo *sintáctico* (demostraciones, deducciones), mientras que el segundo se ha empleado previamente para las definiciones *semánticas* (consecuencia).

Para un segundo ejemplo, considerar la siguiente deducción en $\mathcal{L}$ que, siendo A, B, C *fbfs* cualesquiera de $\mathcal{L}$, demuestra $\{A, (B \to (A \to C))\} \vdash_{\mathcal{L}} (B \to C)$.

(1) A	hipótesis
(2) $(B \to (A \to C))$	hipótesis
(3) $(A \to (B \to A)$	Axioma L1
(4) $(B \to A)$	*MP* entre (1) y (2)
(5) $((B \to (A \to C)) \to ((B \to A) \to (B \to C)))$	Axioma L2
(6) $((B \to A) \to (B \to C))$	*MP* entre (2) y (5)
(7) $(B \to C)$	*MP* entre (4) y (6)

El sistema formal $\mathcal{L}$ se definió como un sistema en el cual ciertas *fbfs* pueden demostrarse como teoremas. Naturalmente, interesa saber qué *fbfs* de $\mathcal{L}$ son teoremas, sin embargo la única manera de hacerlo es exhibir una sucesión finita de *fbfs* que constituya una demostración. Esto puede resultar bastante complicado y los métodos a emplear en cada caso particular no siempre son obvios. Una manera de hacer menos complicada la demostración de teoremas, es permitir en las demostraciones la inserción de *fbfs* que ya se han demostrado previamente. Esto se corresponde con el procedimiento matemático común de citar teoremas previamente demostrados. También se puede simplificar una demostración evitando alguno paréntesis, siempre y cuando no se cambie el sentido de la *fbf*; por ejemplo en el caso del Axioma L3:$(((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A))$ se puede solo escribir $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$.

Otro modo de simplifica una demostración consiste en hacer uso de ciertos metateoremas generales, algunos de los cuales tienen el efecto de reglas de inferencia adicionales. La principal herramienta es el resultado siguiente.

Teorema 1 (Teorema de la Deducción) *(forma sintáctica) Sean A y B fbfs de $\mathcal{L}$ y sea Γ un conjunto de fbfs de $\mathcal{L}$ (que puede ser vacío),*

$$\textit{Si } \Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B \textit{ entonces } \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$$

Demostración: la demostración se hará por inducción sobre la cantidad de *fbfs* que forman parte de la deducción de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. Para el paso base se supone que esta deducción tiene un solo miembro que es la misma B, entonces o B es un axioma de $\mathcal{L}$, o pertenece a $\Gamma \cup \{A\}$ (es decir $B \in \Gamma$ o $B \in \{A\}$). Teniendo esto en cuenta se debe hace la deducción de $(A \to B)$ a partir de Γ.

- **Primer caso:** B es un axioma de $\mathcal{L}$,

1) B	Axioma de $\mathcal{L}$
2) $(B \to (A \to B))$	Axioma L1
3) $(A \to B)$	*MP* entre 1) y 2)

  Luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$

- **Segundo caso:** $B \in \Gamma$

1) B	hipótesis
2) $(B \to (A \to B))$	Axioma L1
3) $(A \to B)$	*MP* entre 1) y 2)

  Nuevamente $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$

- **Tercer caso:** $B \in \{A\}$, en este caso B es A, por lo tanto hay que mostrar que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to A)$

1) $(A \to ((A \to A) \to A))$	Axioma L1
2) $((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$	Axioma L2
3) $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	*MP* entre 1) y 2)
4) $((A \to (A \to A))$	Axioma L1
5) $(A \to A)$	*MP* entre 3) y 4)

En esta última demostración no hizo falta utilizar ninguna *fbf* de Γ porque $(A \to A)$ es un teorema de $\mathcal{L}$, pero es claro que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to A)$. Por lo tanto aquí también se mostró que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$, con lo que se completa la demostración del paso base.

Supongamos ahora que la deducción de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ es una sucesión de n miembros, siendo $n \geq 1$, y que la proposición se verifica para todas las *fbfs* C que pueden deducirse a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ por medio una sucesión de *menos de n* pasos. Esta será nuestra hipótesis inductiva. Ahora hay que considerar cuatro casos diferentes:

- **Primer caso:** B es un axioma de $\mathcal{L}$. Este caso es exactamente igual al primer caso del paso base, es decir que se debe demostrar que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$, y esto se hace de la misma forma en que se hizo antes.
- **Segundo caso:** $B \in \Gamma$. Nuevamente se demuestra $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$ de la misma que en el caso base.
- **Tercer caso:** $B \in \{A\}$, es decir que B es A, y la demostración de $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to A)$ es la misma mostrada antes.
- **Cuarto caso:** B se obtiene de dos *fbfs* anteriores de la demostración mediante una aplicación de *MP*. Estas dos *fbfs* necesariamente tendrán las formas C y $(C \to B)$ y cada una de ellas puede ciertamente deducirse de $\Gamma \cup \{A\}$ mediante una sucesión de *menos* de n pasos. En cada caso, basta con omitir los miembros siguientes de la deducción original, y lo que queda es la sucesión deseada. (ver Observación 1-b)). Entonces, de lo anterior tenemos que $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} C$ y $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} (C \to B)$, y aplicando la hipótesis de inducción se llega a que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to C)$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to (C \to B)$.

  Entonces, ahora se puede realizar la deducción requerida, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$, como sigue:

1)	
$\vdots$	deducción de $(A \to C)$ a partir de Γ
k) $(A \to C)$	
k+1)	
$\vdots$	deducción de $(A \to (C \to B))$ a partir de Γ
l) $(A \to (C \to B))$	
l+1) $(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$	Axioma L2
l+2) $((A \to C) \to (A \to B))$	*MP* entre l) y l+1)
l+3) $(A \to B)$	*MP* entre k) y l+2)

De este modo se demostró que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$ en los cuatro casos. Así pues, por el principio de inducción matemática, la proposición se verifica cualquiera que sea el número de *fbfs* de la deducción de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. c.q.d. ■

Notar que este teorema no se corresponde con el demostrado para la semántica (ver apunte *La consecuencia lógica y la deducción*), ya que en ese caso valía el recíproco; la siguiente proposición iguala las cosas en el ámbito sintáctico:

Proposición 1 *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \to B)$ *entonces* $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$*, siendo* A*y* B *fbfs de* $\mathcal{L}$ *y* Γ *un conjunto (eventualmente vacío) de fbfs de* $\mathcal{L}$*.*

Demostración: Lo que se debe hacer es dada una deducción de $(A \to B)$ a partir de Γ, construir una deducción de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$.

1)	
$\vdots$	deducción de $(A \to B)$ a partir de Γ
k) $(A \to B)$	
k+1) A	hipótesis ($\in \Gamma \cup \{A\}$)
k+2) B	*MP* entre k) y k+1)

Luego se llegó a que $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$. c.q.d. ■

A continuación se se utilizará el Teorema de la Deducción para demostrar el siguiente corolario.

Corolario 1 *Dadas tres fbfs cualesquiera* A, B *y* C *se cmple que:*

$$\{(A \to B), (B \to C)\} \vdash_{\mathcal{L}} (A \to C)$$

Demostración: A continuación se realizará su deducción

1) $(A \to B)$	hipótesis
2) $(B \to C)$	hipótesis
3) A	hipótesis
4) B	*MP* entre 1) y 3)
5) C	*MP* entre 2) y 4)

Lo que se demostró es

$$\{(A \to B), (B \to C), A\} \vdash_{\mathcal{L}} C$$

es decir

$$\{(A \to B), (B \to C)\} \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} C$$

De este modo, por el Teorema de la Deducción se obtuvo, como se quería:

$$\{(A \to B), (B \to C)\} \vdash_{\mathcal{L}} (A \to C)$$

c.q.d. ■

El resultado de este corolario, se podrá aplicar como otra regla de inferencia; esta se conoce como regla del *silogismo hipotético*, y se abrevia como *SH*.

Hay diferentes formas de aplicar tanto el Teorema de la Deducción como su recíproco. Así, si se considera lo demostrado en el corolario 1, se ve que también puede deducirse los siguientes resultados:

$$\{(A \to B), A\} \vdash_{\mathcal{L}} ((B \to C) \to C)$$

$$\{(B \to C), A\} \vdash_{\mathcal{L}} ((A \to B) \to C)$$

Si se aplica nuevamente el Teorema de la Deducción al resultado del corolario también se obtiene

$$\{(A \to B)\} \vdash_{\mathcal{L}} ((B \to C) \to (A \to C))$$

y por lo tanto:

$$\vdash_{\mathcal{L}} ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$$

4.2. Relación entre sintaxis y semántica en $\mathcal{L}$

No siempre es una tarea fácil el demostrar que ciertas *fbfs* particulares de $\mathcal{L}$ son teoremas de $\mathcal{L}$. Muchas veces es difícil saber cómo proceder, en una demostración y el producto final puede ser muy complejo y distar mucho de ser una demostración intuitiva. No obstante, la razón para definir $\mathcal{L}$ ha sido el intento de construir un sistema formal que refleje las ideas intuitivas de deducción, validez y verdad. En el apunte de semántica del Cálculo Proposicional se ha proporcionado una noción de *verdad lógica*, el concepto de tautología. Parece razonable esperar que estas verdades lógicas se correspondan con los teoremas de $\mathcal{L}$.

Si bien los símbolos de $\mathcal{L}$ se consideran como puramente formales, $\mathcal{L}$ se ha definido de tal manera que cada función de verdad está representada por alguna *fbf*. Por lo tanto, aunque no se pueda hablar de asignar valores de verdad a los símbolos de $\mathcal{L}$ de la misma manera que se hizo en el apunte de semántica del Cálculo Proposicional, se puede definir un procedimiento análogo.

Definición 5 *Una **valoración** de $\mathcal{L}$ es una función v cuyo dominio es el conjunto de fbfs de $\mathcal{L}$ y cuyo rango es el conjunto $\{V, F\}$, tal que para fbfs cualesquiera A, B de $\mathcal{L}$*

(i) $v(A) \neq v(\neg A)$

(ii) $v(A \to B) = F$ *si y sólo si* $v(A) = V$ *y* $v(B) = F$

Es claro que una asignación arbitraria de *valores de verdad*'a los símbolos p_1, p_2...de $\mathcal{L}$ conducirá a una valoración, ya que cada *fbfs* de $\mathcal{L}$ tomará exactamente uno de los dos valores de verdad bajo dicha asignación (i) e (ii) se satisfarán trivialmente.

Definición 6 *Una fbf de $\mathcal{L}$ es una tautología si para toda valoración v, $v(A) = V$*

Esto equivale a considerar a A como forma enunciativa y aplicar la definición ya conocida. Además permite demostrar que una *fbf* de $\mathcal{L}$ es un teorema de $\mathcal{L}$ si y sólo si es una tautología.

4.3. Propiedades de un Sistema Formal

De un sistema deductivo se espera naturalmente que sus demostraciones produzcan conclusiones correctas, y también en lo posible la propiedad inversa, es decir que sea capaz de demostrar todas y cada una de ellas. Formalmente ambas propiedades se pueden formular de la siguiente manera:

- Un sistema deductivo *SD* es ***correcto*** (también se lo conoce como *sensato*) si todas las fórmulas demostrables en el sistema, desde el punto de vista semántico son tautologías; y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas, son consecuencia lógica de dichas premisas. Formalmente:

$$\text{si} \quad \vdash_{SD} A \quad \text{implica} \quad \models A$$
$$\text{si} \quad \Gamma \vdash_{SD} A \quad \text{implica} \quad \Gamma \models A$$

- Recíprocamente, un sistema deductivo *SD* es adecuado o ***completo*** (desde el punto de vista semántico) si es capaz de demostrar cualquier fórmula que sea una tautología y deducir cualquier consecuencia lógica. Formalmente:

$$\begin{array}{cccc} \text{si} & \models A & \text{implica} & \vdash_{SD} A \\ \text{si} & \Gamma \models A & \text{implica} & \Gamma \vdash_{SD} A \end{array}$$

Por un simple razonamiento inductivo es claro que la sensatez de un sistema deductivo está garantizada si se cuenta con axiomas verdaderos y reglas de inferencia sensatas, es decir que preservan la verdad. Por su parte, la completitud semántica es la propiedad por la cual todas las fórmulas lógicamente válidas del sistema deductivo son además teoremas del sistema

Veamos estas propiedades aplicada específicamente al sistema formal. $\mathcal{L}$

Teorema 2 (Teorema de la Corrección) *Todo teorema de $\mathcal{L}$ es una tautología.*

Demostración: Sea A un teorema de $\mathcal{L}$. La demostración es por inducción sobre el número de *fbfs* de $\mathcal{L}$ miembros de una sucesión finita que constituya una demostración de A en $\mathcal{L}$.

Para el paso base, supongamos que la demostración de A consta de una sola *fbf*, ella misma. Entonces A tiene que ser un axioma de $\mathcal{L}$. Como ya se había dicho, todos los axiomas de $\mathcal{L}$ son tautologías, esto se comprueba construyendo tablas de verdad, y se deja como ejercicio al lector.

Como hipótesis de inducción se asume que todos los teoremas de $\mathcal{L}$ que poseen demostraciones de menos de n pasos son tautologías.

Supongamos ahora que la demostración de A contiene n *fbfs*, siendo $n \geq 1$, entonces, o bien A es un axioma, en cuyo caso es una tautología; o se deduce mediante *MP* de dos *fbfs* anteriores en la demostración. Si este último es el caso, estas dos *fbfs* deberán tener las formas B y $(B \to A)$ de modo que la demostración de A sea del tipo:

1)
$\vdots$
k) $(B \to A)$
$\vdots$
k+i) B
$\vdots$
n) A *MP* entre k) y k+i)

Pero B y $(B \to A)$ son teoremas de $\mathcal{L}$ cuyas demostraciones son sucesiones de menos de n *fbfs* (se corta la demostración de A apropiadamente en los pasos k y $k+i$ respectivamente). Así pues, por hipótesis de inducción, B y $(B \to A)$ son tautologías, por lo tanto, debe ser A una tautología (dado que no existe manera de que alguna valoración haga siempre verdaderas a B y a $(B \to A)$ si A no es también una tautología).

Luego, por el principio de inducción matemática, todo teorema de $\mathcal{L}$ es una tautología, por lo tanto ***el sistema formal $\mathcal{L}$ es correcto*** o sensato. c.q.d.■

Otro teorema nos asegura que la propiedad recíproca a la recién demostrada, también se cumple en el sistema formal $\mathcal{L}$:

Teorema 3 (Teorema de Adecuación para $\mathcal{L}$) [2] *Si A es una fbf de $\mathcal{L}$ y es una tautología, entonces*

[2] Para aquellos interesado en su demostración, ver *Lógica para Matemáticos*, A.G. Hamilton, Capítulo 2: Proposición 2.23, página 53.

$\vdash_{\mathcal{L}} A$, *es decir, es un teorema.*

Con esto se ha comprobado que el sistema formal $\mathcal{L}$ es ***correcto y completo semáticamente*** (o adecuado), es decir, tiene la principal propiedad que un sistema debería tener: Que las *fbfs* derivables en él sean precisamente las *lógicamente verdaderas*. Los axiomas y la regla de deducción de $\mathcal{L}$ caracterizan la deducción lógica, al menos en este contexto.

Un sistema deductivo completo puede demostrar cualquier conclusión lógicamente implicada por las premisas, lo que se ha denotado con $\Gamma \models A$. ¿Pero qué ocurre si $\Gamma \not\models A$? En la teoría de la computación, se define un problema de decisión como aquél que tiene dos respuestas posibles: "si" o "no". Se dice que un problema de decisión es *decidible* si existe un algoritmo (es decir, un procedimiento que siempre termina) que lo resuelve. En el marco de los sistemas deductivos es muy relevante también la cuestión de la decidibilidad, que se formula de la siguiente manera. Dados Γ y A, ¿Existe algún algoritmo que responda "si" en el caso de que $\Gamma \models A$ y que responda 'no" en el caso de que $\Gamma \not\models A$?

Proposición 2 *$\mathcal{L}$ es **decidible**, es decir, existe un método efectivo para decidir si una fbf dada de $\mathcal{L}$ es o no un teorema de $\mathcal{L}$.*

Demostración: Para decidir si una *fbf* A es o no teorema de $\mathcal{L}$, basta considerarla como forma enunciativa y construir su tabla de verdad. Es un teorema si y sólo si A es una tautología. c.q.d.■

Esto hace innecesario el seguir construyendo demostraciones en $\mathcal{L}$ para determinar si una fórmula es un teorema. Las tablas de verdad proporcionan un método mecánico y finito, aunque no siempre rápido, para demostrar si una *fbf* dada es una tautología, por lo tanto un teorema de $\mathcal{L}$. Otro método finito que permite ese tipo de análisis son los Árboles de Refutación, que además a veces resultan más eficientes que las tablas de verdad.

Definición 7 *Un sistema formal es **consistente** si no existe en el mismo ninguna fbf A tal que, tanto A como $(\neg A)$ sean teoremas.*

Naturalmente, esta definición seria irrelevante si el propio $\mathcal{L}$ no fuese consistente.

Proposición 3 *$\mathcal{L}$ es consistente.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{L}$ no fuese consistente, entonces podría existir una *fbf* A tal que $\vdash_{\mathcal{L}} A$ y $\vdash_{\mathcal{L}} (\neg A)$. Entonces, por el teorema 2 (Teorema de Corrección), tanto A como $(\neg A)$ serían tautologías. Pero esto es imposible, ya que si $(\neg A)$ es una tautología, entonces A es una contradicción. Por lo tanto, ***$\mathcal{L}$ es consistente.*** c.q.d.■

Definición 8 *Un sistema formal es **completo** si para toda fbf A se cumple que o bien A es teorema o bien $\neg A$ lo es.*

Cuando se habla de *completo* en la definición anterior se refiere a la ***completitud sintáctica*** que nos asegura que existe una prueba para cada fórmula o para su negación.

Observación: $\mathcal{L}$ dista mucho de ser completo. Si por ejemplo consideramos la expresión p_1, tenemos que p_1 es una *fbf* de $\mathcal{L}$, pero ni p_1, ni $(\neg p_1)$ son teoremas de $\mathcal{L}$, y eso basta para mostrar que $\mathcal{L}$, ***no es sintácticamente completo.***

Considerando lo visto en hasta aquí, claramente es posible afirmar que la lógica proposicional es ***consistente***, es ***decidible***, es ***correcta*** y es ***completa*** (semánticamente); sin embargo no es completa desde el punto de vista sintáctico.

5. Limitaciones de la lógica proposicional

La lógica proposicional permite formalizar y teorizar sobre la validez de una gran cantidad de enunciados y argumentaciones, pero puede observarse que en el universo del discurso de esta lógica no hay objetos, sino afirmaciones que se formulan sobre objetos. Esto hace que el poder expresivo, y por tanto la utilidad de esta lógica resulten limitadas, ya que en los razonamientos deductivos hay normalmente premisas que expresan conocimiento sobre objetos del universo del discurso, propiedades de los mismos y relaciones entre estos objetos, que es imposible formalizar en la lógica proposicional a menos, claro está, que se fuerce la conceptualización particularizando lo general.

Para expresar relaciones más complejas, son necesarios lenguajes más potentes como lo son lógicas de orden superior, que son más generales; sin embargo, éstas pierden algunas de las propiedades analizadas. Veremos que la lógica de predicados (de primer orden) es completa y correcta, pero no es decidible.

Reconocimientos

El presente apunte se realizó tomando como base el Libro *Lógica para Matemáticos* de **A. Hamilton** de Editorial Paraninfo. Además se consultó el libro *Lógica para informática* de **Claudia Pons, Ricardo Rosenfeld y Clara Smith** de Facultad de Informática de la Universidad Nacional de La plata (UNLP).